TD MAPLE PHYSIQUE N° 3 :
PARTICULE CHARGEE DANS UN CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

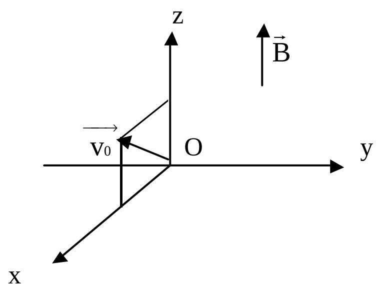
On se propose d'étudier le mouvement d'un proton entrant dans divers champs électromagnétiques.

La masse du proton est $m = 1{,}7.10^{-27}$ kg ; sa charge est $q = 1{,}6.10^{-19}$ C .
Le champ magnétique intervenant est constant, de valeur $B = 0{,}5$ T ; le champ électrique intervenant éventuellement est constant, de valeur $E = 6{,}0.10^{4}$ V.m^{-1} .
Au référentiel du laboratoire galiléen on associe le repère orthonormé direct $(O , \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$.
A l'instant $t = 0$, le proton entre en O dans le champ électromagnétique considéré, avec une vitesse initiale dont la valeur est $v_0 = 1{,}4.10^{6}$ m.s^{-1} ou $v_0 = 0$.

Dans chaque cas on établit les équations différentielles du mouvement ; on en déduit les équations horaires et l'allure de la trajectoire à l'aide de Maple. On introduit pour cela la pulsation cyclotron $\omega = \dfrac{qB}{m} = 4{,}7.10^{7}$ rad.s^{-1} .

I. Cas d'un champ magnétique et d'une vitesse initiale quelconque.

1. Position du problème.



Choisissons l'axe Oz dans la direction du champ $\vec{B} = \overrightarrow{cte}$.

La vitesse initiale ayant une direction quelconque s'écrit $\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{v_{O//}} + \overrightarrow{v_{O\perp}}$.

Choisissons l'axe Ox suivant $\overrightarrow{v_{O\perp}}$, l'axe Oy étant alors défini par $(\vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$ direct.

2. Mise en équations.

Le problème est identique à celui étudié au cours V paragraphe III. 3. avec un proton à la place d'un électron.
L'application du principe fondamental de la dynamique conduit au système d'équations différentielles du second ordre :

$$\left| \begin{array}{l} \ddot{x} = \omega \, \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega \, \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{array} \right.$$

Les conditions initiales s'écrivent : $\vec{r}\,(t=0) = \vec{0}$ et $\vec{v}\,(t=0) = v_{0x}\,\vec{i} + v_{0z}\,\vec{k}$.

3. Utilisation de Maple.

a) Ecrire le système d'équations différentielles et le résoudre compte tenu des conditions initiales.
b) Application numérique : tracer une portion de trajectoire pour $\omega t \in [0 ; 12\,\pi]$, soit $t \in [0 ; \dfrac{12\pi}{\omega}]$, avec $\omega = 4{,}7.10^{7}$ rad.s^{-1} , dans le cas où $v_{0x} = v_{0z} = 10^{6}$ m.s^{-1} (voir l'introduction).

Vérifier que les résultats concordent avec ceux du cours :

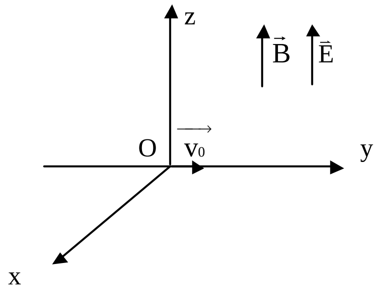
- les équations horaires sont :

$$\left| \begin{array}{l} x = \dfrac{v_{0x}}{\omega} \sin(\omega t) \\ y = \dfrac{v_{0x}}{\omega} (\cos(\omega t) - 1) \\ z = v_{0z}\, t \end{array} \right.$$

- la trajectoire est une hélice de base le cercle d'équation : $x^2 + (y + \frac{v_{0x}}{\omega})^2 = (\frac{v_{0x}}{\omega})^2$, d'axe Oz , le mouvement étant uniforme sur Oz , la portion choisie correspondant à 6 tours d'hélice.

II. Cas d'un champ magnétique et d'un champ électrique parallèles et d'une vitesse initiale qui leur est perpendiculaire.

1. Position du problème.



Choisissons l'axe Oz dans la direction commune des champs $\vec{B} = \overrightarrow{cte}$ et $\vec{E} = \overrightarrow{cte}$.
La vitesse initiale ayant une direction perpendiculaire à cette dernière, choisissons l'axe Oy suivant $\overrightarrow{v_0}$, l'axe Ox étant alors défini par $(\vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$ direct.

2. Mise en équations.

Le problème est strictement identique à celui de l'exercice 4 de la série 15 .
L'application du principe fondamental de la dynamique conduit au système d'équations différentielles du second ordre :

$$\left| \begin{array}{l} \ddot{x} = \omega \, \dot{y} \\ \ddot{y} = - \omega \, \dot{x} \\ \ddot{z} = \dfrac{qE}{m} \end{array} \right.$$

Les conditions initiales s'écrivent : $\vec{r}\,(t = 0) = \vec{0}$ et $\vec{v}\,(t = 0) = v_0 \, \vec{j}$.

3. Utilisation de Maple.

a) Ecrire le système d'équations différentielles et le résoudre compte tenu des conditions initiales.
b) Application numérique : tracer une portion de trajectoire pour $\omega t \in [0 ; 12 \pi]$, soit $t \in [0 ; \frac{12\pi}{\omega}]$, avec les données de l'introduction.

Vérifier que les résultats concordent avec ceux de l'exercice 4 de la série 15 :

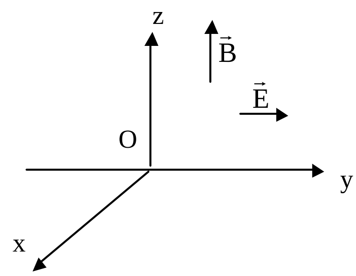
- les équations horaires sont :

$$\left| \begin{array}{l} x = \dfrac{v_0}{\omega} (1 - \cos (\omega t)) \\ y = \dfrac{v_0}{\omega} \sin (\omega t) \\ z = \dfrac{qE}{2m} t^2 \end{array} \right.$$

- la trajectoire est une hélice de base le cercle d'équation : $(x - \frac{v_0}{\omega})^2 + y^2 = (\frac{v_0}{\omega})^2$, d'axe Oz , le mouvement étant uniformément accéléré sur Oz , la portion choisie correspondant à 6 tours d'hélice.

III. Cas d'un champ magnétique et d'un champ électrique perpendiculaires et d'une vitesse initiale nulle.

1. Position du problème.



Choisissons l'axe Oz dans la direction du champ $\vec{B} = \overrightarrow{cte}$ et l'axe Oy dans la direction du champ $\vec{E} = \overrightarrow{cte}$, l'axe Ox étant alors défini par $(\vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$ direct.

2. Mise en équations.

Le problème est strictement identique à celui de l'exercice 3 de la série 15 .
L'application du principe fondamental de la dynamique conduit au système d'équations différentielles du second ordre :

$$\left| \begin{array}{l} \ddot{x} = \omega\,\dot{y} \\ \ddot{y} = \dfrac{qE}{m} - \omega\,\dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{array} \right.$$

Les conditions initiales s'écrivent : $\vec{r}\,(t = 0) = \vec{0}$ et $\vec{v}\,(t = 0) = \vec{0}$.

3. Utilisation de Maple.

a) Ecrire le système d'équations différentielles et le résoudre compte tenu des conditions initiales.

b) Application numérique : tracer une portion de trajectoire pour $\omega t \in [\,0 \,;\, 4\,\pi\,]$, soit $t \in [\,0 \,;\, \dfrac{4\pi}{\omega}\,]$, avec les données de l'introduction.

Vérifier que les résultats concordent avec ceux de l'exercice 3 de la série 15 :

- les équations horaires sont :

$$\left| \begin{array}{l} x = \dfrac{E}{B\omega}\,(\,\omega t - \sin(\omega t)\,) \\ y = \dfrac{E}{B\omega}\,(\,1 - \cos(\omega t)\,) \\ z = 0 \end{array} \right.$$

- la trajectoire est dans le plan xOy : c'est une cycloïde, chaque arche étant de longueur $\dfrac{2\pi}{\omega}\dfrac{E}{B}$ et de largeur $\dfrac{2}{\omega}\dfrac{E}{B}$, la portion tracée correspondant à deux arches.