TD MAPLE PHYSIQUE N° 4 : PORTRAIT DE PHASE D'UN OSCILLATEUR

On se propose de tracer les différents portraits de phase rencontrés en cours ou en exercice.

On utilise pour cela la procédure **phaseportrait** présente dans la bibliothèque **DEtools**.
Les arguments sont :

- la liste des équations différentielles du premier ordre vérifiées par les grandeurs utilisées ;
- la liste des variables ;
- le domaine de variation du paramètre temps ;
- l'ensemble de la liste des conditions initiales.

Les notations sont celles du cours.
On fixe pour tout ce TD : $\omega = 2\,\pi = 6{,}28$ rad.s^{-1} .

(Dans les parties I et II , le prototype est le pendule élastique horizontal : $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Dans la partie IV : $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$.)

I. Régime libre de l'oscillateur harmonique non amorti.

L'équation différentielle s'écrit : $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

Tracer $v = \dot{x}$ en fonction de x ,sur une période, pour trois jeux de conditions initiales : x(t=0) = 0 ; v(t=0)= 0,5 m.s^{-1} ; 1 m.s^{-1} ; 2 m.s^{-1} .

II. Régime libre de l'oscillateur harmonique amorti par frottement fluide.

L'équation différentielle s'écrit : $\ddot{x} + \dfrac{\omega}{Q}\,\dot{x} + \omega^2 x = 0$.

Prenons pour conditions initiales : x(t=0) = 2 m ; v(t=0)= 0 .
Tracer $v = \dot{x}$ en fonction de x , entre 0 et 5 secondes, pour trois valeurs du facteur de qualité :

- Q = 5 (régime pseudopériodique) ;
- Q = 0,5 (régime critique) ;
- Q = 0,2 (régime apériodique).

III. Oscillateur auto-entretenu : modèle de Van der Pol.

L'équation différentielle s'écrit : $\ddot{x} + (x^2 - p)\,\dot{x} + \omega^2 x = 0$.

Pour un paramètre de valeur p = 2 , tracer $v = \dot{x}$ en fonction de x , entre 0 et 5 secondes, pour deux jeux de conditions initiales : x(t=0) = 0,1 m ; v(t=0)= 0 puis : x(t=0) = 6 m ; v(t=0)= 0 .

IV. Cas du pendule simple.

C'est l'exercice 9 de la série 16.
L'équation différentielle s'écrit : $\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$ (elle s'obtient par application du PFD ou par dérivation de « l'intégrale première du mouvement »).
Tracer $\varphi = \dot{\theta}$ en fonction de θ , entre 0 et 2 secondes, pour cinq jeux de conditions initiales : θ(t=0) = 0 ; φ(t=0)= 4 rad.s^{-1} ; 8 rad.s^{-1} ; 12 rad.s^{-1} ; 16 rad.s^{-1} ; - 16 rad.s^{-1} .
Montrer par le calcul que le pendule effectue un tour complet s'il est lancé depuis sa position d'équilibre avec une vitesse angulaire initiale dont la valeur absolue minimale est $2\,\omega$; retrouver ce résultat sur le portrait de phase (ce résultat a également été étudié lors du premier TD Maple Physique).

V. Compléments.

On peut s'intéresser aussi à la représentation de l'élongation en fonction du temps à l'aide de la procédure **DEplot** de la bibliothèque **DEtools**. Les arguments sont :

- l'équation différentielle du mouvement ;
- l'élongation ;
- le domaine de variation du paramètre temps ;
- l'ensemble de la liste des conditions initiales.

Traiter ainsi les cas précédents I , II et III.