TD MAPLE PHYSIQUE N°5 : ELECTROSTATIQUE

Préambule.

Les champs statiques seront étudiés en fin d'année.
L'électrostatique étudie le champ électrique et le potentiel électrique créés par des distributions de charges fixes dans un référentiel donné.

- Le *champ électrostatique* créé au point M par une charge ponctuelle q placée au point O a été découvert en TS :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{OM}}{(OM)^3} .$$

On définit alors le *potentiel électrostatique* $V(M)$ créé en M par la charge ponctuelle q en O par la relation : $\vec{E}.d\vec{r} = -dV$. Soit encore $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\,V(M)$. On calcule ainsi :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{OM} .$$

- Le principe de superposition permet de calculer le champ électrostatique créé au point M par une distribution discrète de charges ponctuelles : $q_1 = \lambda_1 q$ au point P_1 , $q_2 = \lambda_2 q$ au point P_2 , … , $q_n = \lambda_n q$ au point P_n :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i\frac{\overrightarrow{P_iM}}{(P_iM)^3}\right) ;$$

et le potentiel associé :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i\frac{1}{P_iM}\right) .$$

Dans ce TD on s'intéresse, pour des distributions discrètes de charges données :

- à la topographie du champ électrostatique, autrement dit aux *lignes de champ* :

le vecteur champ électrostatique est continuellement tangent à des courbes appelées lignes de champ, orientées dans le sens du champ

- à la topographie du potentiel électrostatique, autrement dit aux *surfaces équipotentielles* :

une surface équipotentielle est le lieu des points M vérifiant $V(M) = cte$

On travaille en dimension 2 , dans le plan xOy .

Les déclarations d'un point, d'une charge, d'une distribution de charges se font de la manière suivante :
- le point A (a , b) est déclaré :

> A : = [a , b] ;
- la charge ponctuelle λq au point A est déclarée :

> C : = [A , λ] ;
- la distribution de charges C1 , C2 , … , Cn est déclarée :

> charges : = [C1 , C2 , … , Cn] ;

On bâtira, pour une distribution discrète de charges, les procédures successives :
- de calcul du potentiel électrostatique : $V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i\frac{1}{P_iM}\right)$,
- de calcul du champ électrostatique : $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\,V(M)$,
- de tracé des équipotentielles,
- de tracé des lignes de champ.

Remarque.

Le tracé des équipotentielles est très long (plus de 10 minutes par tracé) : faire trois groupes n'effectuant chacun qu'un tracé :

- le groupe 1 effectue le tracé du I.4.b) ;
- le groupe 2 effectue le tracé du II.1. ;
- le groupe 3 effectue le tracé du II.2.

Le tracé des lignes de champ est un peu plus rapide (quelques minutes) et peut être effectué par tous.

I. Création des procédures, application au cas d'une charge ponctuelle q en O .

Remarque : la procédure de calcul du potentiel électrostatique $V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i \frac{1}{P_iM})$ nécessite préalablement une procédure de calcul de la distance entre les points P_i et M .

1.a) <u>Procédure de calcul de la distance entre deux points A et B : distance(A,B).</u>

La procédure *distance* se définit en fonction des paramètres *A* et *B* , la variable locale étant la distance *d* définie par :
$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ où x_A , y_A , x_B , y_B sont les coordonnées respectives des points A et B .
Rappelons qu'un point virgule sépare les différentes instructions de la procédure (superflu après la dernière instruction), celle-ci se terminant par > end :

1.b) <u>Application.</u>

Appliquer la procédure au calcul de la distance du point O (0 , 0) au point M (x , y) .
Il s'affiche : $\sqrt{x^2 + y^2}$.

2.a) <u>Procédure de calcul du potentiel électrostatique créé en M par une distribution de charges ponctuelles : VM(charges,M).</u>

La procédure *VM* se définit en fonction des paramètres *charges* et *M* , les variables locales étant *i* et *V* avec :
$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i \frac{1}{P_iM})$
où λ_i est la deuxième coordonnée du i ème élément de *charges* et où P_iM est la distance de P_i à M , P_i étant la première coordonnée du i ème élément de *charges* , *i* variant de 1 à n où n est le nombre d'opérandes dans *charges* .

2.b) <u>Application.</u>

Appliquer la procédure au calcul du potentiel électrostatique créé en M (x , y) par une charge ponctuelle q en O (0 , 0).
Il s'affiche : $\frac{1}{4}\frac{q}{\pi\varepsilon\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3.a) <u>Procédure de calcul du champ électrostatique créé en M par une distribution de charges ponctuelles : EM(charges,M).</u>

Le calcul du champ à partir du potentiel à l'aide de l'opérateur gradient nécessite le chargement de la bibliothèque **linalg** permettant l'emploi de cet opérateur.
La syntaxe est :
> grad (f(x,y),[x,y]) ;

La procédure *EM* se définit en fonction des paramètres *charges* et *M* , les variables locales étant *Vxy* et *E* .
Vxy est la procédure *VM* exprimée en fonction des coordonnées x et y .
E est le gradient (en respectant la syntaxe indiquée).
Pour faire afficher à Maple les coordonnées du vecteur champ électrique il faudra, dans l'expression de *E* , affecter à x la première coordonnée de M et à y la deuxième coordonnée de M (si ceci n'est pas indispensable pour l'application qui suit, ça l'est pour les procédures qui suivent).

3.b) Application.

Appliquer la procédure au calcul du champ électrostatique créé en M (x , y) par une charge ponctuelle q en O (0 , 0).

Il s'affiche : [$\frac{1}{4}\frac{qx}{\pi\varepsilon(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{1}{4}\frac{qy}{\pi\varepsilon(x^2+y^2)^{3/2}}$] .

4.a) Procédure de tracé des équipotentielles d'une distribution de charges sur un intervalle donné : équipot(charges,deltax,deltay).

Le tracé nécessite le chargement de la bibliothèque **plots**.

La procédure *equipot* se définit en fonction des paramètres *charges* , *deltax* et *deltay* , la variable locale étant *V1* .

En effet, on trace non pas V(M) mais $\frac{4\pi\varepsilon_0 V(M)}{q} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{1}{P_iM}$: *V1* est la procédure *VM* , exprimée en fonction des coordonnées x et y , multipliée par $4\pi\varepsilon_0/q$.

On utilise pour le tracé la fonction contourplot dont la syntaxe est :

> contourplot(arctan(V1),x=deltax,y=deltay,view=-Pi/2..Pi/2,contours=20,grid=[100,100]) ;

4.b) Application.

Appliquer la procédure au tracé des équipotentielles d'une charge ponctuelle q en O (0, 0) , x et y variant de -4 à 4 .

Remarque : l'utilisation de la fonction arctan dans la procédure du tracé de V1 peut surprendre mais se comprend aisément pour l'application choisie : l'expression du potentiel obtenue au 2.b) n'est pas définie au point O , soit $V(O) \to \infty$, or $\arctan(\infty) \to \pi/2$, le tracé par contourplot de arctan(V1) est un tracé « aplati » par rapport au tracé de V1 .

5.a) Procédure de tracé des lignes du champ créé par une distribution de charges sur un intervalle donné : champ(charges,deltax,deltay)

La procédure *champ* se définit en fonction des paramètres *charges* , *deltax* et *deltay* , les variables locales étant *E1* et *EU* .

En effet, on représente en fait un vecteur unitaire colinéaire au champ électrostatique : $\frac{\vec{E}(M)}{\|\vec{E}(M)\|}$ qui est noté *EU* .

Avec $\frac{\vec{E}(M)}{\|\vec{E}(M)\|} = \frac{\vec{E}(M)4\pi\varepsilon_0/q}{\|\vec{E}(M)4\pi\varepsilon_0/q\|}$, *E1* est la procédure *EM* , exprimée en fonction des coordonnées x et y , multipliée par $4\pi\varepsilon 0/q$,

EU étant évalué en utilisant la fonction norm (dont la syntaxe est norm(A,2) pour $\vec{A}^2$).

On utilise pour le tracé la fonction fieldplot dont la syntaxe est :

> fieldplot(EU,x=deltax,y=deltay,grid=[20,20],arrows=slim) ;

(grid=[20,20] fixe la trame de la grille)

5.b) Application.

Appliquer la procédure au tracé des lignes du champ créé par une charge ponctuelle q en O (0, 0) , x et y variant de -4 à 4 .

II. Deux autres applications.

1. Cas d'un dipôle.

Le dipôle est formé de deux charges ponctuelles :

q au point de coordonnées (1 , 0) et -q au point de coordonnées (-1 , 0) .

Utiliser les deux dernières procédures pour tracer les équipotentielles et les lignes de champ, x et y variant de -4 à 4 .

Situer les charges sur les représentations.

2. Cas d'un quadripôle.

Le quadripôle est formé de quatre charges ponctuelles :

q au point de coordonnées (0 , 1) , q au point de coordonnées (-1 , 0) , -q au point de coordonnées (0 , -1) et -q au point de coordonnées (1 , 0) .

Utiliser les deux dernières procédures pour tracer les équipotentielles et les lignes de champ, x et y variant de -4 à 4 .

Situer les charges sur les représentations.