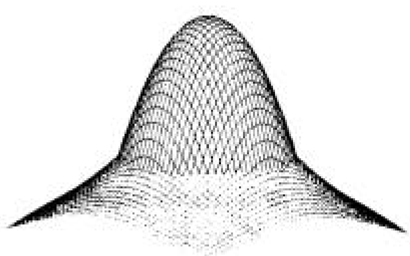
SERIE D'EXERCICES N° 30 :
FLUX DU CHAMP ELECTROSTATIQUE, THEOREME DE GAUSS
DIPOLE ELECTROSTATIQUE

Distribution à symétrie plane.

Exercice 1.
1. Déterminer le champ créé en un point M de l'espace par une couche plane infinie d'épaisseur e et de charge volumique ρ uniforme.
2. En déduire le potentiel $V(M)$ en faisant le choix $V = 0$ sur le plan médian de la distribution.
3. Donner la représentation graphique de $E(M)$ et de $V(M)$.

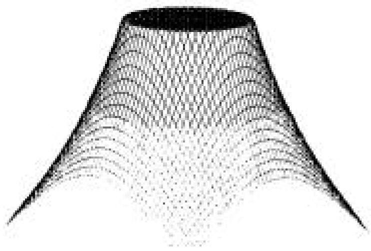
Distribution à symétrie cylindrique.

Exercice 2.



1. Déterminer le champ créé en un point M de l'espace par un cylindre d'axe (Oz), de rayon R, à l'intérieur duquel se trouve une charge volumique uniformément répartie ρ.
2. En déduire le potentiel $V(M)$ à une constante près.
3. Donner la représentation graphique de $E(M)$ et de $V(M)$. Vérifier la concordance avec la représentation symbolique « en relief » du potentiel obtenue avec Maple et donnée ci-contre.

Exercice 3.



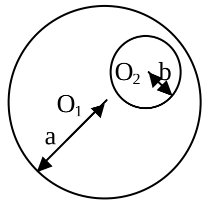
1. Déterminer le champ créé en un point M de l'espace par un cylindre d'axe (Oz), de rayon R, portant la charge surfacique uniforme σ.
2. En déduire le potentiel $V(M)$ à une constante près.
3. Donner la représentation graphique de $E(M)$ et de $V(M)$. Vérifier la concordance avec la représentation symbolique « en relief » du potentiel obtenue avec Maple et donnée ci-contre.

Distribution à symétrie sphérique.

Exercice 4.
1. Déterminer le champ créé en un point M de l'espace par une boule de rayon R à l'intérieur de laquelle se trouve une charge volumique uniformément répartie ρ.
2. En déduire le potentiel $V(M)$ en fixant $V(\infty) = 0$.
3. Donner la représentation graphique de $E(M)$ et de $V(M)$.

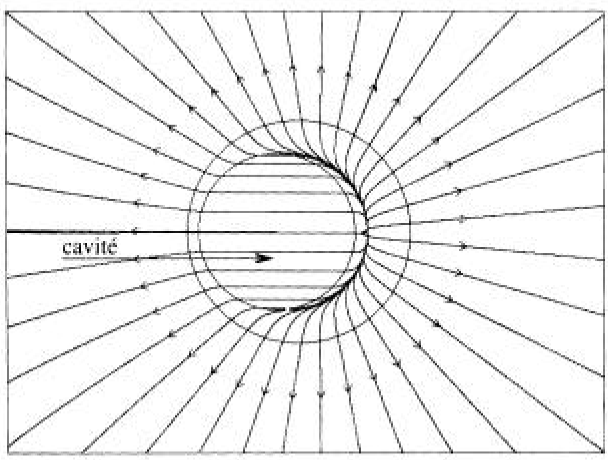
Principe de superposition.

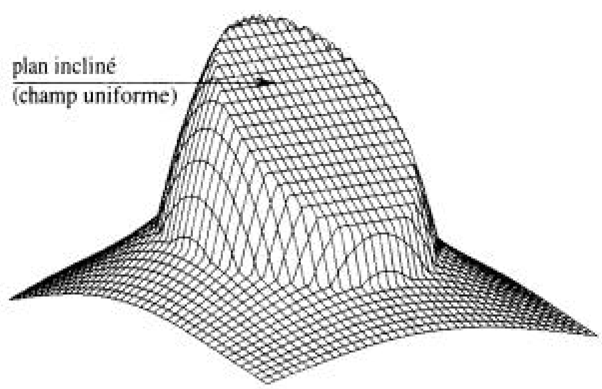
Exercice 5.



Une boule de rayon a portant la charge volumique uniformément répartie ρ possède une cavité sphérique de rayon b vide de charges.
1. Déterminer le champ dans la cavité.

2. Interpréter les représentations des lignes de champ et des équipotentielles données ci-dessous :





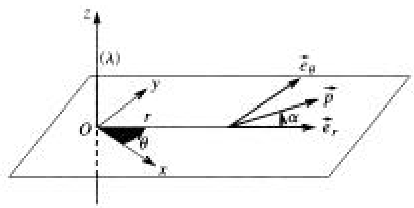
Analogie entre le champ électrostatique et le champ gravitationnel.

Exercice 6.
Un astre sphérique de rayon R possède une répartition de masse à symétrie sphérique.
Quel est le champ gravitationnel créé à une distance r supérieure à R de son centre ? (On appliquera le théorème de Gauss.)

Dipôle électrostatique.

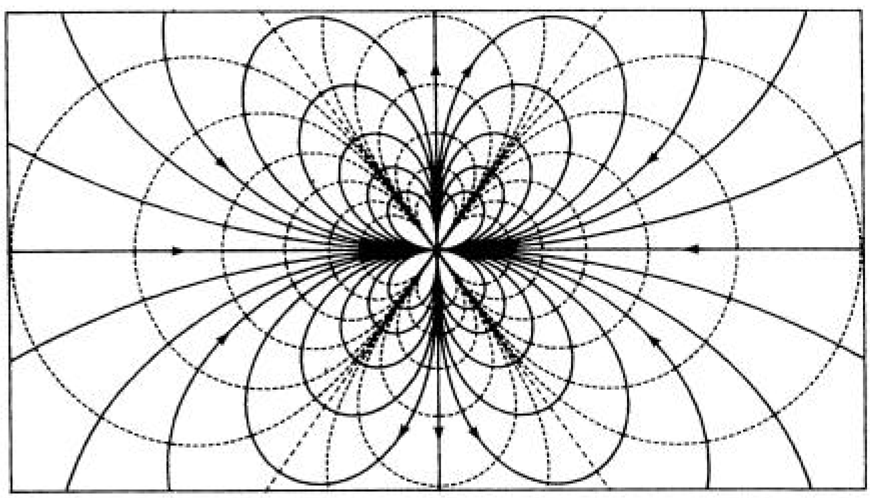
Exercice 7 : force subie par un dipôle dans un cas unidimensionnel.
Un dipôle placé en un point de coordonnées cartésiennes (x, y, z) est soumis au champ $\vec{E} = E(x)\,\vec{u}_x$.
Calculer, à l'aide du modèle du doublet, puis à l'aide de son expression, la force subie par le dipôle lorsque :
1. $\vec{p}$ est parallèle à $\vec{u}_x$;
2. $\vec{p}$ est perpendiculaire à $\vec{u}_x$.

Exercice 8 : actions exercées par un fil infini chargé sur un dipôle.
Déterminer les actions mécaniques exercées par le champ d'un fil rectiligne infini portant la charge linéique uniforme λ sur un dipôle placé en M dans un plan perpendiculaire au fil comme indiqué ci-contre.
Pour déterminer la force, on utilisera successivement les deux méthodes suivantes :



1. en utilisant l'expression : $\vec{F} = (\vec{p}\,.\overrightarrow{\text{grad}})\,\vec{E}$;
2. en utilisant l'expression : $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\vec{p}\,.\,\vec{E})$ à $\vec{p} = \overrightarrow{\text{cte}}$.

Exercice 9 : potentiel et champ d'un quadripôle.
En un point O est placée la charge $+2q$. Deux points A et B symétriques par rapport à O portent chacun la charge $-q$. On pose $OA = OB = a$.
On se propose d'étudier le champ créé par cette distribution en un point M éloigné. On pose $OM = r >> a$ et $\theta = (OA , OM)$.
1. Quel est le moment dipolaire de cette distribution ?
2. Exprimer le potentiel V en M en fonction de r et de θ .
3. Calculer les composantes radiale et orthoradiale du champ en M .
4. Etablir l'équation polaire des lignes de champ. Interpréter la carte donnée ci-dessous :



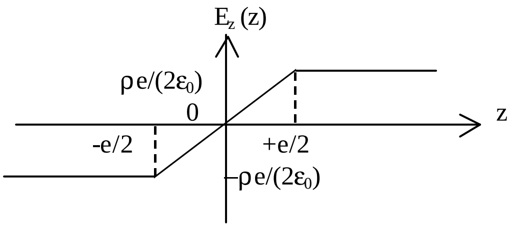
Réponses (les vecteurs sont ici notés en caractères gras).

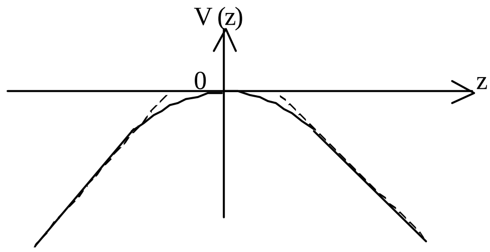
Exercice 1.

1) $E_z(z) = \dfrac{\rho z}{\varepsilon_0}$ si $|z| < e/2$; $E_z(z) = \dfrac{\rho e}{2\varepsilon_0}$ si $z > e/2$; $E_z(z) = -\dfrac{\rho e}{2\varepsilon_0}$ si $z < -e/2$.

2) $V(z) = -\dfrac{\rho z^2}{2\varepsilon_0}$ si $|z| < e/2$; $V(z) = -\dfrac{\rho e}{2\varepsilon_0}\left(|z| - \dfrac{e}{4}\right)$ si $|z| > e/2$.

3)

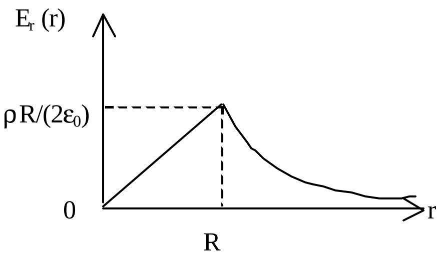


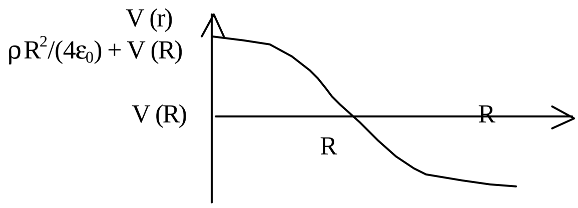


Exercice 2.

1) Pour $r < R$: $E_r(r) = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}$; pour $r > R$: $E_r(r) = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$.

2) Pour $r < R$: $V(r) = \dfrac{\rho}{4\varepsilon_0}(R^2 - r^2) + V(R)$; pour $r > R$: $V(r) = -\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R} + V(R)$.

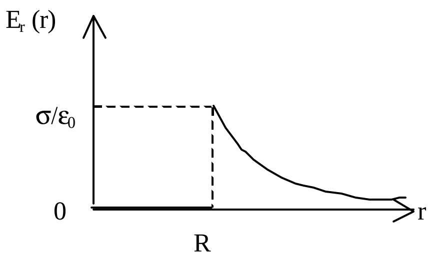


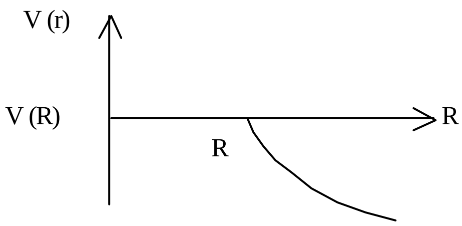


Exercice 3.

1) Pour $r < R$: $\mathbf{E} = \mathbf{0}$; pour $r > R$: $E_r(r) = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}$.

2) Pour $r < R$: $V(r) = V(R)$; pour $r > R$: $V(r) = -\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R} + V(R)$.

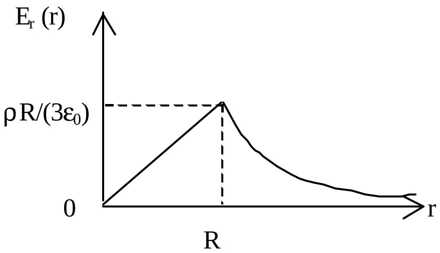


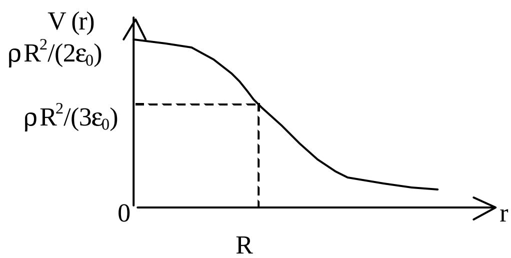


Exercice 4.

1) Pour $r < R$: $E_r(r) = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}$; pour $r > R$: $E_r(r) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$.

2) Pour $r < R$: $V(r) = -\dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}(r^2/3 - R^2)$; pour $r > R$: $V(r) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$.





Exercice 5.

1) $\mathbf{E}(M) = \dfrac{\rho}{3\,\varepsilon_0}\ \mathbf{O_1O_2}$.

Exercice 6.

$G_r\,(r) = \dfrac{G\,M}{r^2}$.

Exercice 7.

1) $\mathbf{F} = p\,\dfrac{dE(x)}{dx}\ \mathbf{u_x}$. 2) $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Exercice 8.

1) $\mathbf{F} = \dfrac{\lambda\,p}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\ (-\cos\alpha\,\mathbf{u_r} + \sin\alpha\,\mathbf{u_q})$. 2) $\mathbf{G} = -\dfrac{\lambda\,p\sin\alpha}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,r}\ \mathbf{u_z}$.

Exercice 9.

1) $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. 2) $V(M) = \dfrac{q\,a^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^3}\ (1 - 3\cos^2\theta)$. 3) $E_r = \dfrac{3\,q\,a^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^4}\ (1 - 3\cos^2\theta)$ et $E_\theta = -\dfrac{6\,q\,a^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^4}\ \cos\theta\,\sin\theta$.

4) $r = \mu\,|\sin\theta|\,\sqrt{|\cos\theta|}$.