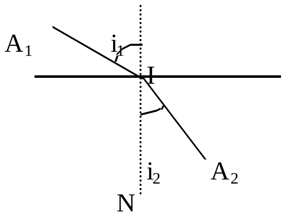
SERIE D'EXERCICES N° 10 : MECANIQUE : CINEMATIQUE DU POINT (début).

Les grandeurs en caractère gras sont des grandeurs vectorielles.

Mouvement rectiligne.

Exercice 1.
On considère deux milieux séparés par une surface plane, dans lesquels une particule se déplace avec des vitesses différentes $\mathbf{v_1}$ et $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_1}$ et $\mathbf{v_2}$ étant tous deux des vecteurs constants.
Quelle relation les angles i_1 et i_2 doivent-ils vérifier pour que le trajet A_1IA_2 ait une durée minimale, A_1 et A_2 étant fixes ? Que vous rappelle ce résultat ?

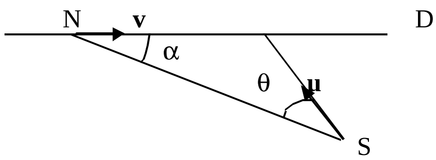
Figure dans le plan d'incidence : plan défini par le « rayon incident » $\mathbf{A_1I}$ et la normale $\mathbf{IN}$ à la surface de séparation au point d'incidence I :



Note : on pourra introduire H_1 et H_2 les projetés de A_1 et A_2 sur la surface de séparation et poser $A_1H_1 = a_1$, $A_2H_2 = a_2$; on exprimera alors la durée du trajet en fonction de a_1, a_2, v_1, v_2, i_1, i_2 puis on dérivera par rapport à i_1 compte tenu de la relation $H_1I + IH_2 =$ constante.

Exercice 2.
Un navire N est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $\mathbf{v}$, le long d'une droite D . Un sous-marin immobile S tire une torpille T à l'instant où l'angle $(\mathbf{NS}, \mathbf{v})$ a la valeur α. T étant animée d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $\mathbf{u}$.

1. Quelle doit être la valeur de l'angle de tir $\theta = (\mathbf{u}, \mathbf{SN})$ si l'on veut couler N ?
2. Si l'on veut que T atteigne N en un temps minimum, à quel instant, c'est à dire pour quelle valeur de α, convient-il de tirer ? (on donnera la relation entre α et θ). Calculer la valeur de l'angle de tir θ correspondante.



Exercice 3.

1. Dans un plan (Ox , Oy) deux particules se déplacent en mouvement rectiligne uniforme. A un instant donné, elles se trouvent en M_1 et M_2 et leurs vitesses sont $\mathbf{v_1}$ et $\mathbf{v_2}$. A quelle condition les vecteurs $\mathbf{M_1M_2}$, $\mathbf{v_1}$ et $\mathbf{v_2}$ doivent-ils satisfaire pour que les particules entrent en collision ? Que peut-on en déduire pour leur vitesse relative ?
2. Application. M_1 est un faisan qui vole horizontalement à la vitesse de $20\ m.s^{-1}$ et M_2 est la charge tirée par un chasseur à la vitesse moyenne de $300\ m.s^{-1}$.

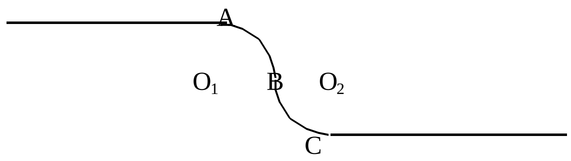
a) Le chasseur tire un premier coup lorsqu'il voit le faisan dans une direction faisant l'angle $\theta_1 = 30°$ avec sa trajectoire ; quelle correction de tir, définie par l'angle θ_2, devrait-il effectuer ?
b) La correction ayant été mal faite, le chasseur tire un deuxième coup qui abat le faisan lorsqu'il passe au plus près du chasseur (il est alors à 30 m du chasseur). A combien de mètres le chasseur a-t-il tiré « devant » le faisan ?

Exercice 4.
Un mobile animé d'une vitesse $\mathbf{v_0} = v_0\,\mathbf{i}$ constante, pénètre dans un milieu résistant dans lequel il est soumis à une accélération $\mathbf{a} = -k\,v^2\,\mathbf{i}$; k est une constante et v la vitesse instantanée.

1. En prenant pour origine des temps et des espaces le moment où le mobile pénètre dans le milieu, établir la loi donnant $v(t)$.
2. En déduire l'équation du mouvement.
3. Montrer qu'après un parcours x , la vitesse est $v = v_0\,e^{-kx}$.

Mouvement circulaire.

Exercice 5.
Préciser l'accélération subie par un mobile se déplaçant à la vitesse v constante sur une trajectoire formée de deux segments rectilignes parallèles, raccordés par deux quarts de cercle de même rayon R : avant A, entre A et B, entre B et C, après C.
A.N. : $v = 72\ \mathrm{km.h^{-1}}$ et $R = 20\ \mathrm{m}$.



Exercice 6.
Dans le plan xOy d'un repère (O , $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$), un point P se déplace sur un cercle de rayon R et de centre $I\ (R , 0 , 0)$.
A l'instant $t = 0$, P se trouve en $A\ (2R , 0 , 0)$ et possède la vitesse positive $\mathbf{v_0}\ (0 , v_0 , 0)$.
On désigne par r et θ les coordonnées polaires de P.

1. Former l'équation polaire du cercle, en déduire son équation cartésienne.
2. Représenter sur la figure la base polaire ($\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$) de P. Calculer en fonction de θ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes polaires des vecteurs vitesse $\mathbf{v}$ et $\mathbf{a}$ de P dans le repère (O , $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$, $\mathbf{k}$).
3. Soit s l'abscisse curviligne de P (l'origine est en A).

- Donner l'expression de s en fonction de θ.
- Représenter sur la figure la base intrinsèque ($\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$) de P.
- Calculer en fonction de θ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes de $\mathbf{v}$ et de $\mathbf{a}$ dans cette base.
- Calculer les composantes polaires de $\mathbf{T}$ et de $\mathbf{N}$. Retrouver dans ces conditions les composantes polaires de $\mathbf{v}$ et de $\mathbf{a}$.

4. On désigne par ω la vitesse angulaire de P, dont on suppose dans tout ce qui suit qu'elle est constante.

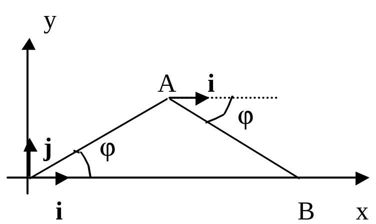
- Donner en fonction de t, les expressions de θ puis de r.
- En déduire les expressions en fonction de t de $\mathbf{v}$ et $\mathbf{a}$ dans les bases polaire et de Frenet.

Détermination de la trajectoire.

Exercice 7.
Les coordonnées d'une particule sont données par les fonctions du temps : $x = 2\,t$ et $y = 4\,t\,(t - 1)$.

- Déterminer l'équation de la trajectoire.
- Calculer la vitesse à l'instant t.
- Montrer que le mouvement a une accélération constante dont on déterminera les composantes tangentielle et normale.

Exercice 8.



Soit un système constitué de deux barres identiques OA et AB, de longeur $2\,b$, articulées en A et assujetties à rester dans le plan (O , $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$). B glisse le long de l'axe Ox et l'angle $\varphi = (\mathbf{i} , \mathbf{OA})$ vérifie $\varphi = \omega t$ avec ω constant.

- Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire du milieu M de AB.
- Déterminer l'accélération de M.

Mouvement hélicoï dal.

Exercice 9.
Un point M décrit une hélice circulaire d'axe Oz.
Ses équations horaires sont : $x = a \cos\theta$; $y = a \sin\theta$; $z = h\,\theta$. a est le rayon du cylindre de révolution sur lequel est tracé l'hélice, h est une constante et θ est l'angle que fait avec Ox la projection $\mathbf{OM'}$ de $\mathbf{OM}$ sur Oxy.

1. Donner en coordonnées cylindriques les exp ressions de la vitesse et de l'accélération.
2. Montrer que le vecteur vitesse fait avec le plan Oxy un angle constant.
3. Montrer que si le mouvement de rotation est uniforme, le vecteur accélération passe par l'axe du cylindre et est parallèle au plan Oxy. Calculer le rayon de courbure.

Poursuites.

Exercice 10.
Les quatre mouches Adèle, Berthe, Célestine et Dorothée sont initialement aux quatre sommets A, B, C, D d'un carré de côté l_0. Adèle vole vers Berthe, Berthe vers Célestine, Célestine vers Dorothée et Dorothée vers Adèle avec des vitesses de même module v. Au bout de combien de temps les quatre mouches atteindront-elles le centre du carré ?
Note. Il est bon de remarquer que l'axe Oz passant par le centre du carré et perpendiculaire au plan $ABCD$ est un axe de répétition pour le problème : les quatre mouches resteront continuellement aux quatre sommets d'un carré de centre O (de côté et d'orientation variables). On étudiera alors l'évolution de la situation entre les instants t et $t + dt$ et on fera un développement limité au premier ordre.

Réponses.

Exercice 1.

$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}$ (loi de Descartes pour la réfraction).

Exercice 2.

1) $\sin\theta = \frac{v}{u} \sin\alpha$. 2) $\alpha = \pi/2 - \theta$ et $\tan\theta = \frac{v}{u}$.

Exercice 3.

1) $\mathbf{M_1M_2} = (\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2})\, t$; vitesse relative colinéaire à $\mathbf{M_1M_2}$. 2.a) $\sin\theta_2 = \frac{v_1}{v_2} \sin\theta_1$. 2.b) $l_1 = \frac{v_1}{v_2}\, l_2$.

Exercice 4.

1) $v = \frac{v_0}{1 + k\, v_0\, t}$. 2) $x = \frac{1}{k} \ln(1 + k\, v_0\, t)$. 3) $v = v_0\, e^{-k x}$.

Exercice 5.

Avant A et après C : $\mathbf{a} = \mathbf{0}$; entre A et b et entre B et C : $a = \frac{v^2}{R} = 20\ \mathrm{m.s^{-2}}$, $\mathbf{a}$ étant dirigé vers le centre de courbure.

Exercice 6.

1) $r = 2 R \cos\theta$ et $x^2 + y^2 - 2 R x = 0$.
2) $\mathbf{v} = 2 R \dot\theta\, (-\sin\theta\, \mathbf{u_r} + \cos\theta\, \mathbf{u_\varphi})$ et $\mathbf{a} = -2 R [\mathbf{u_r} (2 \cos\theta\, \dot\theta^2 + \sin\theta\, \ddot\theta) + \mathbf{u_\varphi} (2 \sin\theta\, \dot\theta^2 - \cos\theta\, \ddot\theta)]$.
3) $s = 2 R \theta$; $\mathbf{v} = 2 R \dot\theta\, \mathbf{T}$ et $\mathbf{a} = 2 R (\ddot\theta\, \mathbf{T} + 2 \dot\theta^2 \mathbf{N})$; avec $\mathbf{T} = -\sin\theta\, \mathbf{u_r} + \cos\theta\, \mathbf{u_\varphi}$ et $\mathbf{N} = -\cos\theta\, \mathbf{u_r} - \sin\theta\, \mathbf{u_\varphi}$ on retrouve les expressions précédentes. 4) $\theta = \frac{\omega_0 t}{2}$ que l'on reporte dans r , $\mathbf{v}$ et $\mathbf{a}$; $\mathbf{v} = R \omega_0\, \mathbf{T}$ et $\mathbf{a} = R \omega_0^2\, \mathbf{N}$.

Exercice 7.

1) $y = x^2 - 2 x$. 2) $v = 2 \sqrt{16 t^2 - 16 t + 5}$. 3) $\mathbf{a} = 8\, \mathbf{j} = \mathbf{cte}$ avec $a_T = 16 \frac{2 t - 1}{\sqrt{16 t^2 - 16 t + 5}}$ et $| a_N | = \frac{8}{\sqrt{16 t^2 - 16 t + 5}}$.

Exercice 8.

$\frac{x^2}{9 b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse) et $\mathbf{a} = -\omega^2\, \mathbf{OM}$.

Exercice 9.

1) $\mathbf{v} = a \dot\theta\, \mathbf{u_\varphi} + h \dot\theta\, \mathbf{u_z}$ et $\mathbf{a} = a \ddot\theta\, \mathbf{u_\varphi} - a \dot\theta^2\, \mathbf{u_r} + h \ddot\theta\, \mathbf{u_z}$. 2) Soit $\varphi = (\mathbf{u_\varphi} , \mathbf{v})$: $\tan\varphi = \frac{h}{a} = \mathrm{cte}$. 3) $\rho = \frac{a^2 + h^2}{a}$.

Exercice 10.

$t = l_0 / v$.