SERIE D'EXERCICES N° 20 : SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE

Exercice 1 : mouvement d'une machine tournante, intérêt du volant.

1. Régime transitoire.

Initialement immobile, une machine tournante de moment d'inertie J par rapport à son axe, est soumise à partir de l'instant $t = 0$ à l'action d'un couple moteur de moment $\Gamma = \Gamma_0$ constant. Etudier le mouvement de la machine en supposant que l'ensemble des forces de frottement a un moment de la forme $-k\,\omega$. Analyser ce mouvement en identifiant d'abord la vitesse angulaire ω_0 atteinte en régime permanent ainsi que le temps de relaxation τ du système.

2. Influence d'une vibration.

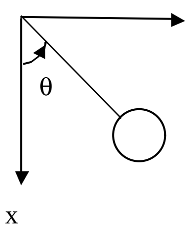
On reprend l'étude précédente en supposant que, en raison de vibrations indésirables, le couple moteur n'est plus une constante mais est modulé à la fréquence $\Omega/2\pi$ avec un taux de modulation η :
$\Gamma = \Gamma_0\,(1 + \eta \cos \Omega t)$.
Reprendre l'étude du mouvement en établissant l'équation différentielle définie par la fonction $\varepsilon(t)$ telle que :
$\omega(t) = \omega_0\,[1 + \varepsilon(t)]$.
Montrer que, au bout d'un temps suffisant, $\varepsilon(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation Ω que l'on cherchera sous la forme :
$\varepsilon(t) = \alpha \cos(\Omega t - \psi)$.
Déterminer les constantes α et ψ en fonction des données η, Ω et τ.

3. Rôle d'un volant.

A l'aide des expressions précédentes, expliquer pourquoi, de façon à régulariser le fonctionnement d'une machine tournante, on adjoint aux parties tournantes un anneau massif et de grand rayon appelé volant.

Exercice 2 : pendule pesant.

Un pendule est constitué par un récipient sphérique à parois minces de rayon R, rempli d'eau. Le récipient est fixé à une tige rigide légère. La distance du point de suspension O au centre du récipient est égale à l.
Exprimer le rapport T_1 / T_2 où T_1 est la période des petites oscillations pour l'eau liquide et T_2 celle pour l'eau gelée.
On donne le moment d'inertie d'une sphère pleine de masse M par rapport à un de ses diamètres : $J = \dfrac{2}{5} M R^2$.
On néglige la viscosité de l'eau ainsi que la variation du volume lors de la solidification.



Exercice 3 : une expérience classique.

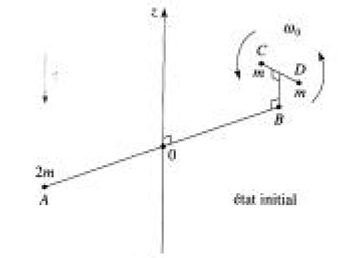
Le sujet de l'expérience est assis sur un tabouret tournant, et tient deux haltères de masse m.
Pour simplifier nous admettrons que :

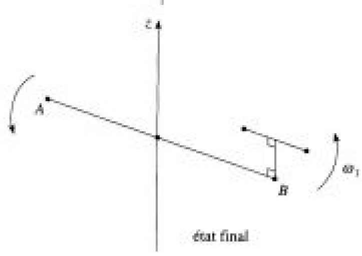
- les haltères sont ponctuelles ;
- du point de vue de la rotation autour de (Oz), le sujet et son tabouret sont équivalents à un système de points matériels de moment d'inertie J par rapport à (Oz) ;
- la rotation est sans frottement.

Le présentateur lui demande de tendre les bras, ce qui place les haltères à une distance r_1 de l'axe. Il lui imprime un mouvement de rotation de vitesse angulaire ω_1, puis il lui demande de ramener les haltères près du corps jusqu'à une distance r_2 de l'axe. Quelle est alors la vitesse de rotation ω_2 ?

Exercice 4 : inertie de rotation.

Une tige AB horizontale de masse négligeable, de longueur $2a$ et de milieu 0, peut tourner sans frottement autour de l'axe vertical (Oz).
Une boule de masse $2m$, assimilée à un point matériel, est placée en A.
L'extrémité B supporte un axe vertical, autour duquel une autre tige horizontale CD, de longueur $2b$ et de masse négligeable, peut tourner autour de son milieu O'.
Deux boules de même masse m sont fixées en C et D.
Dans l'état initial, la tige AB est immobile et la tige CD tourne avec une vitesse angulaire ω_0. Des frottements en O' amènent la tige CD à être finalement alignée avec AB.
Déterminer quelle est la vitesse finale de rotation ω_1 du système rigide alors formé par les deux tiges.





Exercice 5 : treuil.

Un treuil est constitué d'un cylindre de révolution de rayon R et de moment d'inertie J par rapport à son axe Δ. Il peut tourner sans frottement autour de Δ, immobile dans un plan horizontal. Une chaîne, dont nous négligeons l'épaisseur et la masse, est enroulée sur le cylindre et retient un seau de masse M.

Déterminer l'accélération du seau si le système est laissé à lui-même.

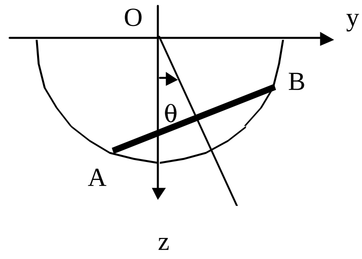
Exercice 6.

Une tige rectiligne homogène AB, de masse m, glisse sans frottement à l'intérieur d'un demi-cercle de centre O, de rayon R. Ce demi-cercle est situé dans un plan vertical et son axe de symétrie (Oz) est vertical. L'angle AOB est égal à $2\pi/3$.

Déterminer le mouvement de la tige par des considérations énergétiques.

Indication : la tige admet pour axe de rotation instantané l'axe (Ox) ; on repère la position de son centre d'inertie par l'angle θ (voir la figure).

On donne le moment d'inertie d'une tige de longueur l par rapport à un axe qui lui est perpendiculaire et passant par son centre : $J = \dfrac{ml^2}{12}$.



Réponses.

Exercice 1.

1) $\tau \dfrac{d\omega}{dt} + \omega = \omega_0$ où $\omega_0 = \dfrac{\Gamma_0}{k}$ et $\tau = \dfrac{J}{k}$. 2) $\tau \dfrac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon = \eta \cos(\Omega t)$ où $\alpha = \dfrac{\eta}{\sqrt{1+\Omega^2 \tau^2}}$ et $\psi = \text{Arctan}(\Omega t)$. 3) Pour J grand ε est faible et $\omega \approx \omega_0$.

Exercice 2.

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2}}} \ .$$

Exercice 3.

$$\omega_2 = \frac{J + 2\,m\,r_1{}^2}{J + 2\,m\,r_2{}^2}\,\omega_1 \ .$$

Exercice 4.

$$\omega_1 = \frac{b^2}{2a^2 + b^2}\,\omega_0 \ .$$

Exercice 5.

$$\mathbf{a}(G) = \frac{M R^2}{M R^2 + J}\,\mathbf{g} \ .$$

Exercice 6.

$R\,\ddot{\theta} + g \sin\theta = 0$: petites oscillations de période propre $T = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$.