SERIE D'EXERCICES N° 13 : MECANIQUE :
ENERGIE D'UN POINT MATERIEL

Les grandeurs en caractère gras sont des grandeurs vectorielles. Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen.

Energie potentielle.

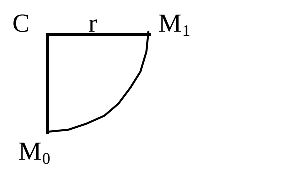
Exercice 1.
L'énergie potentielle correspondant à la force qui s'exerce entre les deux atomes d'une molécule diatomique est correctement donnée par : $U(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}$ où x désigne la distance intermoléculaire et a et b sont des constantes positives.
1. Donner l'expression de la force $\mathbf{f}(x)$ qui s'exerce entre les deux atomes.
2. Les masses des deux atomes sont m et M ($M > m$). En supposant que l'atome de masse M reste au repos en un point O, tandis que l'autre peut se déplacer sur la droite $x'Ox$, trouver les différents mouvements possibles à l'aide du graphe de la fonction $U(x)$. Quelle est la distance d'équilibre x_0 entre les deux noyaux ?
3. Montrer que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $f(x_0+\varepsilon) = -k\,\varepsilon$ pour $\varepsilon << x_0$. En déduire la période des petites oscillations de m autour de la position d'équilibre en fonction de m, a et b.

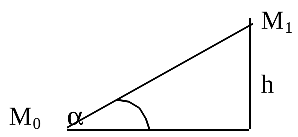
Exercice 2.
On considère un champ de forces $\mathbf{F}$ de composantes $X = 2xz$; $Y = yz$; $Z = Z(x,y)$.
1. Déterminer $Z(x,y)$ pour que $\mathbf{F}$ dérive d'une énergie potentielle U que l'on calculera, sachant que la force est nulle en O. On prendra le plan Oxy comme origine des énergies potentielles.
2. Calculer alors, le long de l'hélice d'équations paramétriques $x = R\cos\theta$; $y = R\sin\theta$; $z = h\theta$, la circulation de $\mathbf{F}$ de M_1 ($\theta=0$) à M_2 ($\theta=\pi$).
3. Obtiendrait-on un résultat différent en calculant la circulation le long d'une autre courbe ?

Exercice 3.
On considère le champ de forces de composantes cartésiennes : $X = y^2 - x^2$; $Y = 4xy$.
1. Ce champ dérive-t-il d'une fonction potentielle ?
2. Calculer le travail de la force entre le point $O(0,0)$ et le point $A(1,1)$:
- suivant la droite OA ;
- suivant Ox (de 0 à 1) puis suivant Oy (de 0 à 1) ;
- suivant Oy (de 0 à 1) puis suivant Ox (de 0 à 1).

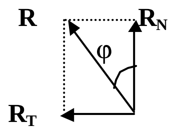
Théorème de l'énergie cinétique.

Exercice 4.
Une bille de masse m est susceptible de glisser :
1. soit sans frottement à l'intérieur d'une portion de jante circulaire, quart de cercle de centre C de rayon r ;
2. soit en présence de frottement de *coefficient de glissement dynamique** f constant, sur un plan incliné d'angle α.
Déterminer dans chaque cas la vitesse minimale v_0 qu'il faut communiquer à la bille en M_0 afin qu'elle atteigne le point M_1.





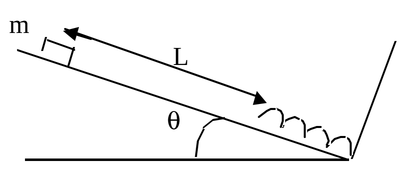
**le coefficient de glissement dynamique* est défini par $f = \tan\varphi = \frac{R_T}{R_N}$ où R_N et R_T sont les réactions normale et tangentielle au support :



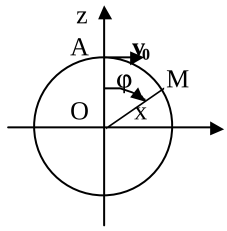
(loi de Coulomb)

Conservation de l'énergie mécanique.

Exercice 5.
On abandonne sans vitesse initiale un bloc de masse m à partir du sommet d'un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale. Le bloc glisse sans frottement et vient comprimer un ressort de constante de raideur k en bas du plan incliné. Au moment du choc, le ressort est comprimé d'une longueur d avant qu'il ne se détende à nouveau.
1. Calculer k en fonction de m, θ, L (voir la figure) et d.
2. Jusqu'à quelle hauteur le bloc remonte-t-il ?



Exercice 6.



Un point M de masse m est placé à l'instant initial sur le sommet A d'une sphère sur laquelle il glisse sans frottement ; on lui communique une vitesse horizontale v_0 .
Soit O le centre de la sphère et R son rayon.

1. Déterminer la réaction R_N de la sphère sur M en fonction de l'angle $\varphi = (\mathbf{OA}, \mathbf{OM})$, de v_0 , R et g l'intensité du champ de pesanteur.
2. Quelle est la valeur maximale φ_m de φ ? Quel est le mouvement ultérieur ?

Exercice 7.

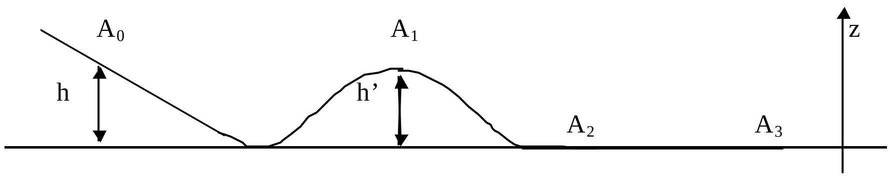
A quelle vitesse v_0 faut-il lancer verticalement un objet de masse m pour qu'il atteigne une altitude z_1 au dessus du sol avec une vitesse nulle dans les deux cas suivants :

1. on suppose $g = g_0$ constant ;
2. on suppose que g varie avec l'altitude proportionnellement à $1 / r^2$? (On appelle R le rayon de la Terre.)

Exercice 8.

Soit un pendule simple de longueur l , de masse m , suspendu en un point O . Donner l'équation du mouvement pour des oscillations de faible amplitude, à partir de considérations énergétiques.

Exercice 9.



Une particule matérielle M de masse m est déposée au point A_0 à l'altitude h sur un plan incliné.

1. La particule parvient-elle au point A_1 d'altitude $h' > h$ en supposant qu'elle glisse sans frottement sur le plan ?
2. Le point matériel est maintenant relié à un ressort de constante de raideur k et de longueur au repos l_0 . Le ressort est comprimé jusqu'à une longueur l puis bloqué, la particule est alors en A_0 . On libère le ressort. Le trajet $A_0A_1A_2$ est parfaitement glissant.

Déterminer :

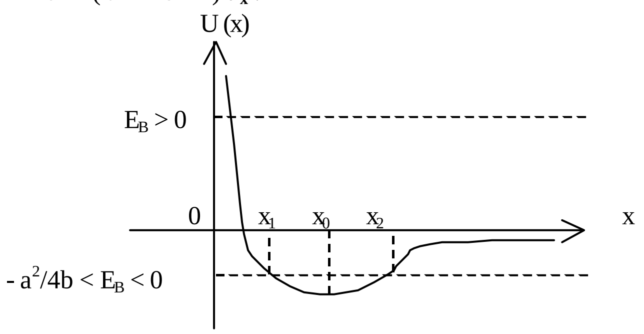
- la longueur l du ressort pour que la particule atteigne A_1 avec une vitesse nulle ;
- la vitesse de cette particule en A_2 ;
- la distance d'arrêt $d = A_2A_3$, sachant qu'à partir de A_2 interviennent des frottements de glissement de coefficient f .

Réponses.

Exercice 1.

1) $\mathbf{f} = -6\,x^{-7}\,(a - 2\,b\,x^{-6})\,\mathbf{u_x}$.

2)



$x_0 = \left(\frac{2\,b}{a}\right)^{1/6}$; $E_B \geq 0$: état de diffusion ; $-a^2/4b < E_B < 0$: état lié .

3) $k = 36\,a\,x_0^{-8}$ et $T = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{m\,2^{4/3}\,b^{4/3}}{a^{7/3}}}$.

Exercice 2.

1) $Z(x,y) = x^2 + y^2/2$ et $U(x,y,z) = -(x^2 + y^2/2)\,z$. 2) $C = R^2\,h\,\pi$ indépendant du chemin suivi.

Exercice 3.

1) Non. 2) $W_1 = 4/3$; $W_2 = 5/3$; $W_3 = 2/3$.

Exercice 4.

1) $v_0 = \sqrt{2\,g\,r}$. 2) $v_0 = \sqrt{2\,g\,h\,(1 + f\,\mathrm{cotan}(\alpha))}$.

Exercice 5.

1) $k = \frac{2\,m\,g\,\sin(\theta)\,(L + d)}{d^2}$. 2) Le bloc remonte jusqu'au point de départ.

Exercice 6.

1) $R_N = m\left[g\,(3\cos(\varphi) - 2) - \frac{v_0^{\,2}}{R}\right]$. 2) $\cos(\varphi_{max}) = \frac{1}{3}\left(\frac{v_0^{\,2}}{g\,R} + 2\right)$.

Exercice 7.

1) $v_0 = \sqrt{2\,g_0\,z_1}$. 2) $v_0 = \sqrt{2\,g_0\,\frac{R\,z_1}{R + z_1}}$.

Exercice 8.

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\theta = 0$.

Exercice 9.

1) Non. 2) $l = l_0 - \sqrt{\frac{2\,m\,g\,(h' - h)}{h}}$; $v_2 = \sqrt{2\,g\,h'}$; $d = \frac{h'}{f}$.