SERIE D'EXERCICES N° 14 : MECANIQUE
REFERENTIELS NON GALILEENS

Loi de la dynamique dans un référentiel non galiléen.

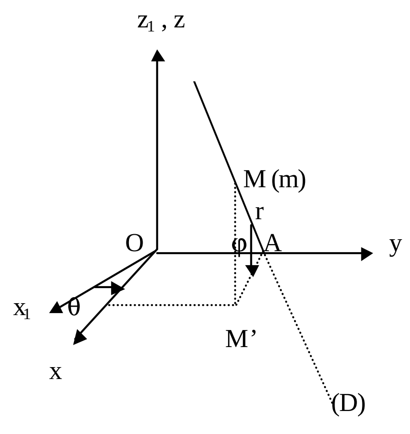
Exercice 1.
Un véhicule a un mouvement rectiligne horizontal uniformément accéléré, d'accélération a. Un pendule simple de longueur l est suspendu en O dans le véhicule. Quelle est la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre relatif repérée par l'angle α que fait le fil avec la verticale ? On traitera le problème en coordonnées polaires. On note g l'intensité du champ de pesanteur.

Exercice 2.
Soit un pendule simple de longueur l suspendu au point O d'un ascenseur, m est la masse ponctuelle placée en M extrémité du pendule. M décrit un arc de cercle dans le plan vertical. On traitera le problème en coordonnées polaires. On note g l'intensité du champ de pesanteur.
1. L'ascenseur est immobile.
Ecrire la relation fondamentale de la dynamique du point matériel, en déduire l'équation différentielle donnant θ, angle que fait le pendule avec la verticale (on supposera que le pendule décrit des petites oscillations). Quelle est la période du mouvement ?
2. L'ascenseur est en mouvement avec l'accélération a (plusieurs cas de figure).
Ecrire la relation fondamentale de la dynamique du point matériel dans le référentiel de l'ascenseur, en déduire les nouvelles valeurs de la période.

Exercice 3.
Une masse m est suspendue au plafond d'un ascenseur par un ressort de raideur k et de masse négligeable.
1. Etudier le mouvement de la masse écartée de sa position d'équilibre de x_0 lorsque l'ascenseur est au repos.
2. Etudier le mouvement de la masse, initialement au repos, lorsque l'ascenseur démarre vers le haut avec une accélération a constante.

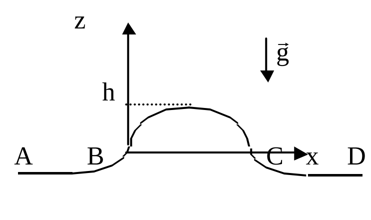
Exercice 4.
Un plateau horizontal P est animé d'un mouvement sinusoïdal vertical d'amplitude a et de fréquence ν. Un point matériel M est posé sur P. Quelle condition, exprimée en fonction de g (intensité du champ de pesanteur) et de a, doit vérifier ν pour que M ne quitte jamais P ?

Exercice 5 : mouvement d'un point P sur une droite en mouvement.
Une particule M de masse m glisse sans frottement sur une droite (D) qui tourne autour de l'axe vertical Oz, sans le rencontrer, avec une vitesse angulaire ω constante.
On étudiera le mouvement relatif de M par rapport au référentiel orthonormé $(Oxyz)$ lié à la droite (D), où Oy a la direction de la perpendiculaire commune à Oz et (D) et où $OA = a$ distance de Oz à (D).
Soit φ l'angle constant que fait (D) avec le plan horizontal xOy.
On pose $AM = r$ et on désigne par g l'accélération de la pesanteur.
1. Montrer que le mouvement relatif de M obéit à une équation différentielle du second ordre du type : $\frac{d^2r}{dt^2} - \alpha r = B$. Exprimer les constantes α et B en fonction de ω, φ et g. En déduire la loi $r(t)$ du mouvement.
2. Déterminer la position M_O où la particule est en équilibre relatif. Etudier la stabilité de cet équilibre.



Dynamique terrestre.

Exercice 6.
Pour entraîner les astronautes à l'impesanteur, le procédé suivant est utilisé. Un avion décrit dans le plan vertical le trajet $ABCD$. On suppose que l'intensité du champ de pesanteur est constante et vaut $g = 10\ m.s^{-2}$.
1. Quelle doit être la nature de la trajectoire BC pour obtenir l'effet d'impesanteur pendant cette phase de vol ?
2. Les possibilités de l'avion limitant la hauteur h à 9000 m, quelle est la durée maximale T pendant laquelle on peut réaliser l'impesanteur par ce procédé ?



Exercice 7.

On assimile le Soleil, la Terre et la Lune à des points matériels de masse respectives M_S, M_T et M_L.
On donne $M_S = 3{,}3.10^5\,M_T$; $M_T = 81{,}3\,M_L$; distance Terre-Soleil : $D = ST \approx SL = 1{,}5.10^8$ km ; distance Terre-Lune : $d = TL = 3{,}8.10^5$ km .

1. Comparer les forces d'attraction gravitationnelles exercées respectivement par le Soleil et par la Terre sur la Lune.
Calculer la distance TL telle que ces deux forces soient égales.

2. Montrer que l'accélération relative $\overrightarrow{a_{LT}}$ de la Lune par rapport à la Terre est donnée par : $\overrightarrow{a_{LT}} = (\overrightarrow{G_{SL}} - \overrightarrow{G_{ST}}) + (\overrightarrow{G_{TL}} - \overrightarrow{G_{LT}})$

où $\overrightarrow{G_{SL}}$ est le champ de gravitation exercé par le Soleil sur la Lune et ainsi de suite.

3. Le premier terme entre parenthèses représente la variation du champ de gravitation dû au Soleil entre la Lune et la Terre. L'exprimer, lorsqu'il est maximum, en fonction de G, constante de gravitation universelle, M_S, d, D et $\vec{u}$ vecteur unitaire dirigé de la Lune vers la Terre (on fera un développement limité au premier ordre en $\frac{d}{D}$).

4. Exprimer le deuxième terme entre parenthèses en fonction de G, M_T, d et $\vec{u}$ (on fera l'approximation $M_L \ll M_T$).
Montrer que la Lune échapperait au voisinage de la Terre pour $d > D\sqrt[3]{\frac{M_T}{2\,M_S}}$.

Exercice 8 : déviation vers l'Est.

Nous reprenons ici l'exemple 2 cité au cours IV paragraphe VII.2.
Dans une expérience de chute libre effectuée en 1833 en Allemagne (latitude $\lambda = +51°$) dans un puits de mine (pour éviter les perturbations apportées par le vent) de profondeur $h = 158$ m , on a mesuré une déviation vers l'Est de $y = 3{,}2$ cm .
Retrouver ce résultat par le calcul.
On note t la durée de la chute. On fera un développement limité en $\frac{t}{T}$ (T : durée du jour sidéral) de $\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ au troisième ordre (on rappelle pour $x \ll 1$: $\sin x \approx x - x^3/6$). On calculera t de façon approchée pour une chute sans déviation.

Réponses (les vecteurs sont ici notés en caractères gras).

Exercice 1.

$T = 2\pi \sqrt{\dfrac{l}{g\cos(\alpha) + a\sin(\alpha)}}$.

Exercice 2.

1) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. 2) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g \pm a}}$.

Exercice 3.

1) $x = x_0 \cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\, t\right)$. 2) $x = \dfrac{m\,a}{k}\left(1 - \cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\, t\right)\right)$.

Exercice 4.

$\nu < \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{a}}$.

Exercice 5.

1) $\alpha = \omega^2\cos^2(\varphi)$ et $B = -g\sin(\varphi)$ d'où $r = A\,\mathrm{ch}\,(\omega\cos(\varphi)\,t + C) + \dfrac{g\sin(\varphi)}{\omega^2\cos^2(\varphi)}$. 2) $r_0 = \dfrac{g\sin(\varphi)}{\omega^2\cos^2(\varphi)}$ instable.

Exercice 6.

1) Trajectoire BC parabolique. 2) $T = 2\sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 1$ min 25 s .

Exercice 7.

1) $\dfrac{F_{SL}}{F_{TL}} = \dfrac{M_S}{M_T}\left(\dfrac{d}{D}\right)^2 = 2{,}1 > 1$; on aurait $F_{SL} = F_{TL}$ pour $d = D\sqrt{\dfrac{M_T}{M_S}} = 2{,}6.10^5$ km .

3) $(\mathbf{G_{SL}} - \mathbf{G_{ST}})_{max} = -\dfrac{2\,G\,M_S\,d}{D^3}\,\mathbf{u}$ (**u** unitaire de L vers T). 4) $\dfrac{G\,M_T}{d^2}\,\mathbf{u}$.

Exercice 8.

$y = \dfrac{g_0\cos(\lambda)}{2\Omega}\left(t - \dfrac{\sin(2\Omega t)}{2\Omega}\right) \approx \dfrac{g_0\cos(\lambda)\,\Omega\,t^3}{3} > 0$ dans les deux hémisphères ; soit avec $t \approx \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$: $y = 3{,}2$ cm .