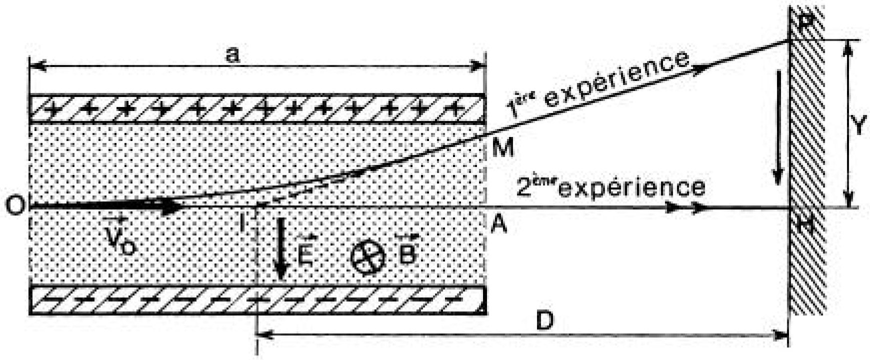
SERIE D'EXERCICES N° 15 : MECANIQUE :
PARTICULE CHARGEE DANS UN CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

Champ électromagnétique.

Exercice 1 : cyclotron de Lawrence.
Le premier cyclotron fut construit en 1932 par Lawrence à Berkeley (Californie). L'appareil avait un rayon de 14 cm et communiquait à des protons une énergie cinétique de 1,2 MeV . La différence de potentiel était de 4000 V au moment du passage du faisceau entre les dés.
Quelles étaient : - La vitesse maximum des protons ? - La tension accélératrice qu'il aurait fallu utiliser pour leur communiquer cette vitesse ? - La fréquence du champ accélérateur ? - Le nombre de tours décrits par les protons ? - Le champ magnétique ?
Données : charge élémentaire : $e = 1{,}6.10^{-19}$ C ; masse d'un proton : $m = 1{,}67.10^{-27}$ kg .

Exercice 2 : mesure de la charge massique de l'électron, expérience de J.J.Thomson (1897).

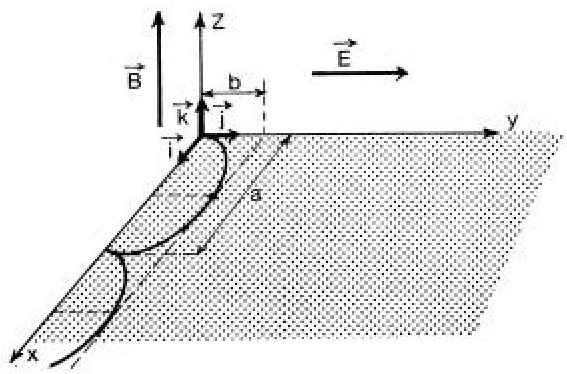
- On réalise la déviation d'un faisceau d'électrons à l'aide d'un champ électrique $\vec{E}$, uniforme et indépendant du temps, et on mesure la déviation Y du spot sur l'écran (voir la figure).
- On établit alors, dans la région où règne le champ $\vec{E}$, un champ magnétique $\vec{B}$, uniforme et indépendant du temps, perpendiculaire à $\vec{E}$. On règle la valeur de $\vec{B}$ de manière à ce que le spot soit ramené en H.



Etablir l'expression de la charge massique e/m de l'électron en fonction des grandeurs intervenant dans l'expérience.
Les mesures les plus récentes réalisées à partir de perfectionnements de cette méthode ou par des méthodes différentes fournissent la valeur : $e/m = 1{,}7588.10^{11}$ C.kg^{-1} .

Exercice 3 : champs électrique et magnétique orthogonaux.
Dans le référentiel (R) de base ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), une particule M , de masse m et de charge q , se trouve à la date t = 0 en O , animée d'une vitesse nulle, dans une région où règnent les champs uniformes et indépendants du temps :
$\vec{E} = E\,\vec{j}$ et $\vec{B} = B\vec{k}$.

1. Etudier le mouvement de M .
2. Calculer la vitesse moyenne de la particule suivant Ox , appelée vitesse de dérive $\overrightarrow{v_D}$.
3. Interpréter la trajectoire dans Oxyz en écrivant la relation fondamentale de la dynamique du point matériel dans le référentiel (R') en translation rectiligne et uniforme de vitesse $\overrightarrow{v_D}$ par rapport à (R) .



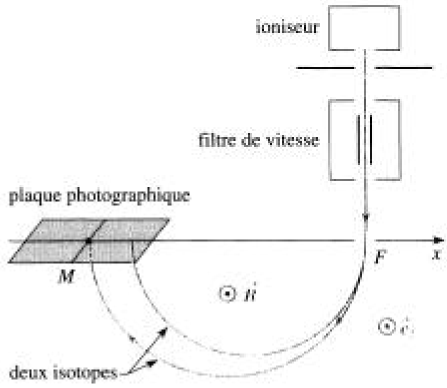
Exercice 4 : champs électrique et magnétique parallèles.
Dans le référentiel (R) de base ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) , une particule M , de masse m et de charge q , se trouve à la date t = 0 en O animée d'une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ suivant Oy , dans une région où règnent les champs uniformes et indépendants du temps $\vec{E}$ et $\vec{B}$ tous deux dirigés suivant Oz .

1. Etablir les équations différentielles du mouvement de la particule chargée.
2. A la distance l du point O et perpendiculairement à Oy , on place une plaque P . Y a-t-il toujours un point d'impact de la particule sur la plaque P ?

Exercice 5 : spectrographe de Bainbridge.

Dans un tel spectrographe, les ions (supposés ici positifs) sortant d'un ioniseur où ils ont été préalablement accélérés sous une tension de valeur absolue U, traversent d'abord un filtre de vitesse, pénètrent alors dans un champ magnétique transversal uniforme et indépendant du temps $\vec{B} = B\,\overrightarrow{e_z}$, puis décrivent un demi-cercle et viennent impressionner la plaque photographique. La fente F étant supposée très fine, déterminer la distance séparant les traces rectilignes associées à deux isotopes.

Calculer la distance séparant les isotopes $^{39}K^+$ et $^{41}K^+$ sur la plaque. Données : $B = 0{,}1$ T ; $U = 10$ kV.



Conduction électrique.

Exercice 6 : modèle de la conduction électrique.

On considère un conducteur électrique cylindrique d'axe Oz dont les charges mobiles sont des électrons animés d'une vitesse $\vec{v}$ sous l'action d'un champ électrique uniforme et indépendant du temps $\vec{E}$ colinéaire et de même sens que Oz, que l'on applique à partir de l'instant $t = 0$. Les électrons sont soumis d'autre part à une force de « frottement » $\vec{f} = -\dfrac{m}{\tau}\vec{v}$, τ étant une constante physique et m la masse de l'électron.

1. Donner la signification physique de la force de frottement ainsi que la dimension de τ.
2. La vitesse étant colinéaire à Oz, exprimer son module v en fonction du temps t. En déduire que v tend vers une valeur limite v_1 qui dépend de e, m, τ et de E (E étant le module du champ $\vec{E}$).
3. A.N. : $E = 1{,}0.10^{-1}$ V.m^{-1} ; $\tau = 2{,}8.10^{-14}$ uSI. Calculer le temps au bout duquel v est voisin de v_1 au millième près. Qu'en déduisez-vous sur l'établissement du régime permanent ?
4. Le nombre d'électrons mobiles par unité de volume est n. Losque le régime permanent est établi, montrer que le vecteur densité de courant $\vec{j}$ peut se mettre sous la forme : $\vec{j} = \sigma_0\,\vec{E}$. Calculer σ_0 littéralement en fonction de n, e, τ et m, puis numériquement en prenant $n = 8{,}5.10^{28}$ m^{-3} (masse de l'électron : $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg).

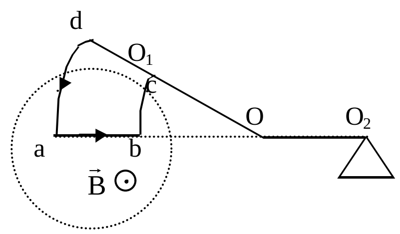
Exercice 7 : effet Hall.

Soit un long ruban conducteur métallique d'épaisseur e, de largeur l, parcouru par un courant continu I et placé dans un champ magnétique uniforme et indépendant du temps $\vec{B}$, normal au plan du ruban.

1. Montrer qu'il existe une d.d.p. U entre les bords du ruban et donc un champ électrique $\vec{E}$ (effet Hall).
2. Une plaquette de cuivre d'épaisseur $e = 0{,}1$ mm, de section $e\,l$ est traversée par un courant d'intensité $I = 10$ A. Le champ magnétique perpendiculaire à la plaquette vaut 1 T. On mesure une tension de Hall de $5{,}5.10^{-6}$ V. En déduire le nombre d'électrons de conduction par unité de volume, comparer ce nombre au nombre d'atomes par unité de volume. On donne la masse atomique du cuivre $M = 63$ g.mol^{-1} et sa densité $d = 9$ (charge élémentaire $q = 1{,}6.10^{-19}$ C).

Exercice 8 : forces de Laplace.

Un appareil de mesure, appelé balance de Cotton, comporte un cadre plat, isolant, supportant un circuit $a\,b\,c\,d$: $a\,d$ et $b\,c$ sont des arcs de cercle de centre O. Le fléau de la balance $O_1\,O\,O_2$ est mobile autour d'un couteau O. En O_2 un plateau permet d'équilibrer la balance. En l'absence de courant, les points $a\,b\,O_2$ sont alignés sur une droite horizontale. Un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et indépendant du temps, normal au plan de la figure, qui contient $a\,b$, agit dans la zone indiquée, il est supposé négligeable ailleurs.



1. Le circuit étant traversé par un courant I, étudier les conditions d'équilibre de la balance et la possibilité de mesurer l'intensité B du champ magnétique. On donne $ab = l$; $OO_2 = d$; R est la distance de O au milieu de ab.
2. Quelle masse m faut-il placer dans le plateau pour équilibrer la balance quand $B = 0{,}5$ T ; $I = 10$ A ; $l = 1{,}5$ cm ; $d = R = 25$ cm ? (on prendra $g = 10$ m.s^{-2})
3. En supposant que la sensibilité de la balance est $\Delta m = 1$ cg, trouver l'incertitude qui résulte de ce fait sur la mesure de B.

On négligera le poids du cadre.

Réponses (les vecteurs sont ici notés en caractères gras).

Exercice 1.

$v_{max} = \sqrt{\frac{2\,K_{max}}{m}} = 1{,}52.10^{7}$ m.s^{-1} ; $U = K_{max} / e = 1{,}2$ MV ; $f = \frac{v_{max}}{2\,\pi\,R_{max}} = 17{,}3$ MHz ; $n = \frac{K_{max}}{2\,e\,U} = 150$ tours ;

$B = \frac{2\,\pi\,m\,f}{e} = 1{,}13$ T .

Exercice 2.

$\frac{e}{m} = \frac{Y\,E}{D\,a\,B^2}$.

Exercice 3.

1) $x = \frac{E}{B\,\omega}\,(\,\omega\,t - \sin(\omega t)\,)$ et $y = \frac{E}{B\,\omega}\,(\,1 - \cos(\omega t)\,)$: cycloïde. 2) $\mathbf{v_D} = \frac{E}{B}\,\mathbf{i}$. 3) Dans (R') le mouvement est circulaire uniforme de rayon $R = \frac{E}{B\,\omega}$.

Exercice 4.

1) $\ddot{x} = \frac{q\,B}{m}\,\dot{y}$ et $\ddot{y} = -\frac{q\,B}{m}\,\dot{x}$ et $\ddot{z} = \frac{q\,E}{m}$. 2) $x = \frac{v_0}{\omega}\,(\,1 - \cos(\omega t)\,)$ et $y = \frac{v_0}{\omega}\,\sin(\omega t)$: point d'impact si $l < \frac{v_0}{\omega} = R$.

Exercice 5.

$d = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2\,U}{q}}\,(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}) = 4{,}6$ cm .

Exercice 6.

1) **f** modélise le ralentissement dû aux chocs des électrons avec les noeuds du réseau ; τ en s . 2) $v = \frac{e\,\tau}{m}\,E\,(\,1 - e^{-t/\tau}\,)$ et $v_1 = \frac{e\,\tau}{m}\,E$. 3) $t = 3\,\tau\,\ln 10 = 1{,}9.10^{-13}$ s : quasi instantané. 4) $\sigma_0 = \frac{n\,e^2\,\tau}{m} = 6{,}7.10^{7}$ S.m^{-1} .

Exercice 7.

1) cours. 2) $n = \frac{I\,B}{q\,U\,e} = 1{,}1.10^{29}$ m^{-3} et $N = \frac{\rho_{Cu}\,N_a}{M_{Cu}} = 8{,}6.10^{28}$ m^{-3} et $n / N = 1{,}3$.

Exercice 8.

1) $B = \frac{m\,g\,d}{I\,l\,R}$. 2) $m = \frac{I\,l\,B}{g} = 7{,}5$ g . 3) $\Delta B = \frac{B\,g}{I\,l}\,\frac{\Delta m}{m} = 4{,}4.10^{-2}$ T .