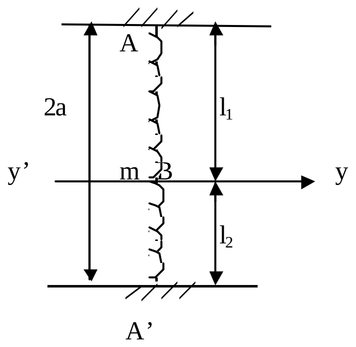
SERIE D'EXERCICES N° 16 : MECANIQUE : OSCILLATEURS

Oscillations libres.

Se reporter aussi aux exercices 4,6,7 et 9 de la série 12, les exercices 1,5 et 8 de la série 13, les exercices 1,2 et 3 de la série 14.

Exercice 1.

Un point matériel M de masse $m = 10$ g est relié à deux ressorts identiques, de raideur $k = 15\ \mathrm{N.m^{-1}}$, de longueur à vide $l_0 = 30$ cm , de masse négligeable, placés verticalement. Les extrémités A et A' des ressorts sont fixées à des points fixes et distants de $2a$, avec $a > l_0$. A l'équilibre on désignera par l_1 la longueur du ressort AB et par l_2 celle du ressort A'B .



1. A l'équilibre, calculer les longueurs l_1 et l_2 des ressorts en fonction de m , g , a et k . Que peut-on dire si l'on suppose le poids mg très petit devant 2ak ?
2. Un dispositif convenable assure le guidage de la masse m suivant l'axe y'y . Tous les frottements seront négligés et on suppose que l'on peut faire l'approximation $l_1 = l_2 = a$. On déplace horizontalement la masse m de y_0 à partir de sa position d'équilibre et on lâche le système sans vitesse initiale. Etablir l'équation différentielle du mouvement. Dans le cas où $y_0 << a$, simplifier cette dernière et en déduire l'expression de la période T du mouvement.

Exercice 2.

Dans le référentiel terrestre (R) considéré comme galiléen, lié au solide de référence Oxyz , une tige tourne dans le plan horizontal xOy autour de son extrémité O à la vitesse angulaire constante ω. Sur cette tige, un anneau M de masse m , peut coulisser sans frottement et est soumis à une force de rappel élastique $\vec{F} = -k(r - r_0)\,\vec{u}_r$, avec $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$, l'anneau partant à $t = 0$ de M_0 ($\overrightarrow{OM_0} = r_0\,\vec{u}_x$) sans vitesse initiale par rapport à la tige.

En écrivant la relation de la dynamique du point matériel dans le référentiel (R_e) lié à la tige, établir l'équation différentielle du mouvement de l'anneau et discuter la nature de celui-ci.

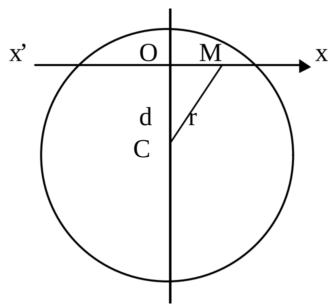
Exercice 3 : frottement solide.

Un cube de masse m assimilable à un point matériel M , est relié à un ressort horizontal de raideur k . On l'écarte de $OA = a$ de sa position d'équilibre O .

1. Quel est le travail de la force de rappel lorsque M revient en O ? Quelle est la vitesse de M lorsqu'il arrive en O si on néglige les frottements?
2. On suppose maintenant que le glissement de M se fait avec un coefficient de glissement f . Quelle est alors la vitesse de M en O ?

Exercice 4.

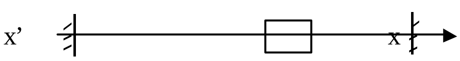
On démontre que pour tout point matériel M , de masse m , situé à l'intérieur de la Terre supposée à symétrie sphérique de masse, à la distance r du centre C de la Terre, l'attraction terrestre est une force agissant sur ce point, dirigée vers le centre de la Terre et de valeur $m\,g_0\,\dfrac{r}{R}$ où R est le rayon de la Terre.



1. Quelle est l'énergie potentielle de pesanteur de la masse m à la distance r de C , en posant cette énergie nulle en C ?
2. On considère un tunnel rectiligne ne passant pas par C et traversant la Terre : la distance du tunnel au centre de la Terre est $d = OC$. La masse m s'y meut sans frottement. Déterminer la nature du mouvement de cette masse dans le tunnel, si elle est abandonnée sans vitesse initiale à la surface de la Terre.
3. Calculer la vitesse maximum de M . On donne $g_0 = 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$; $R = 6{,}4.10^6$ m ; $d = 5{,}0.10^6$ m .

Exercice 5 : analogie ressort-capacité.

1. Déterminer la constante de raideur équivalente à l'association de deux ressorts sans masse, de constantes de raideur respectives k_1 et k_2 et de longueurs à vide respectives l_{01} et l_{02} , d'abord placés en parallèle, puis en série (on pourra traiter le cas d'une association horizontale ou verticale). Comparer aux associations de capacités en électricité.
2. Traiter le cas de l'association ci-contre.



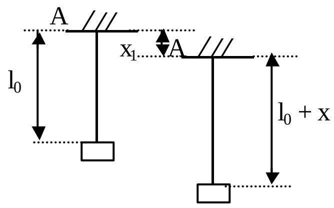
Exercice 6 : oscillateur spatial.

Un point matériel M de masse m, soumis à la seule force centrale $\vec{f} = -k\,\vec{r}$ constitue un oscillateur spatial (ce modèle du « ressort de longueur au repos nulle » peut représenter localement le comportement d'une particule pour laquelle l'origine O est une position d'équilibre stable).

1. Montrer que la trajectoire est plane et elliptique (on notera respectivement $2a$ et $2b$ les longueur et largeur du rectangle dans lequel est inscrit l'ellipse).
2. Exprimer l'énergie mécanique de la particule en fonction de k, a et b à une constante près.

Oscillations forcées.

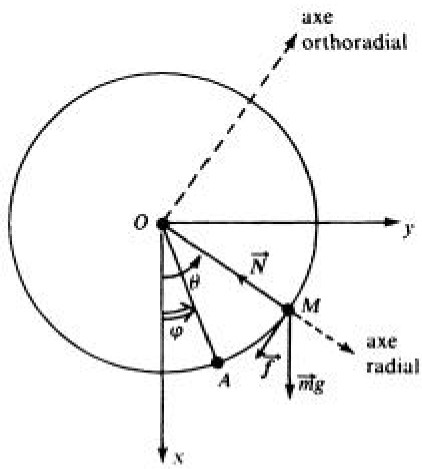
Exercice 7 : principe du sismographe.



Un sismographe est un appareil destiné à mesurer l'amplitude d'une secousse sismique, indépendamment de la pulsation.
Une masse m est suspendue à l'extrémité d'un ressort sans masse de raideur k ; l'autre extrémité du ressort est accrochée à un support A Le mouvement de la masse m est amorti par un frottement visqueux avec un coefficient de frottement b. Lorsque la secousse sismique est produite, elle transmet au support A un mouvement oscillatoire $x_1 = a_1 \cos \Omega t$.

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement relatif de la masse m, repérée par le déplacement relatif x par rapport au support A. Etablir la loi $x(t)$ en régime permanent.
2. Montrer que pour de faibles fréquences propres du ressort et un coefficient de frottement faible, l'appareil peut servir de sismographe.

Exercice 8 : oscillations forcées d'une particule sur un cerceau mobile.



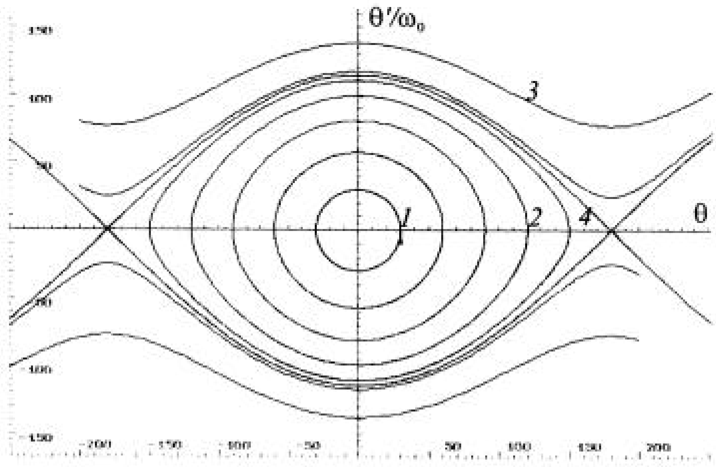
Une particule, assimilée à un point matériel M de masse m, se déplace sur la rainure intérieure d'un cerceau de centre O, de rayon R et d'axe horizontal Oz, avec une force de frottement visqueux $\vec{f} = -b\,m\vec{v}$, où $\vec{v}$ désigne la *vitesse relative* de la particule par rapport au cerceau, et b un coefficient positif constant. La particule est repérée par l'angle orienté $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$, où Ox désigne la verticale descendante : on supposera θ petit dans tout le problème. On désigne par g l'accélération de la pesanteur. La particule est abandonnée à l'instant $t = 0$ depuis la position $\theta = \theta_0$ sans vitesse initiale par rapport au cerceau.
Le cerceau est animé d'un mouvement oscillatoire de rotation, de faible amplitude autour de son axe Oz : $\varphi = \varphi_0 \cos \Omega t$, où $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA})$, OA désignant un rayon fixe du cerceau.
Ecrire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $\theta(t)$
Déterminer l'amplitude θ_M de l'élongation $\theta(t)$ en régime forcé, ainsi que le rayon R_r du cerceau qui permet d'obtenir la résonance d'amplitude.

Oscillations non linéaires.

Exercice 9 : portrait de phase du pendule simple.

On considère un pendule simple (masse m suspendue par l'intermédiaire d'un fil inextensible et sans masse de longueur l à un point fixe O) en régime libre non amorti d'amplitude quelconque.

1. Déterminer une intégrale première du mouvement : en choisissant l'origine des énergies potentielles à l'équilibre, établir avec les notations usuelles : $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2\omega_0^2(1-\cos\theta) = e$ (on exprimera ω_0 et e en fonction des données et de l'énergie totale E).
2. Voici le portrait de phase obtenu avec Maple à partir de la relation précédente pour différentes valeurs de e.



Décrire le comportement du système pour les trajectoires de phase 1, 2, 3 et 4.

Exercice 10 : oscillateur auto-entretenu, modèle de Van der Pol.

On rappelle l'équation différentielle non linéaire de Van der Pol :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (x^2 - p)\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

où x est l'élongation, ω_0 la pulsation propre et p un paramètre positif.

En régime permanent, pour un tel oscillateur, il y a compensation entre les phases d'amplification et d'amortissement et l'énergie mécanique est constante en moyenne sur une période T. En déduire l'amplitude des oscillations en fonction de p.

Réponses.

Exercice 1.

$l_1 = a\left(1 + \dfrac{m\,g}{2\,a\,k}\right)$ et $l_2 = a\left(1 - \dfrac{m\,g}{2\,a\,k}\right)$ avec l_1 et l_2 voisins de a si $\dfrac{m\,g}{2\,a\,k} \ll 1$. 2) $\ddot{y} + \dfrac{2\,k}{m}\left(1 - \dfrac{l_0}{\sqrt{a^2 + y^2}}\right) y = 0$

et pour $y_0 \ll a$: $T = 2\,\pi \sqrt{\dfrac{m}{2\,k\left(1 - \dfrac{l_0}{a}\right)}}$.

Exercice 2.

$\ddot{r} + \left(\dfrac{k}{m} - \omega^2\right) r = \dfrac{k}{m} r_0$: donc si $\dfrac{k}{m} - \omega^2 > 0$: solution sinusoïdale et si $\dfrac{k}{m} - \omega^2 < 0$: solution en cosinus hyperbolique divergente : l'élastique casse.

Exercice 3.

1) $W = k\,a^2 / 2$ et $v_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}\,a$. 2) $v'_0 = \sqrt{{v_0}^2 - 2\,g\,f\,a}$.

Exercice 4.

1) $U = \dfrac{m\,g_0\,r^2}{2\,R}$. 2) $x = \sqrt{R^2 - d^2}\,\cos\left(\sqrt{\dfrac{g_0}{R}}\,t\right)$. 3) $v_{max} = \sqrt{\dfrac{g_0}{R}\left(R^2 - d^2\right)} = 5{,}0.10^3\ m.s^{-1}$.

Exercice 5.

1) association parallèle : $k_{eq} = k_1 + k_2$; association série : $\dfrac{1}{k_{eq}} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$ (analogie ressort/condensateur). 2) Association parallèle.

Exercice 6.

1) $x = a \cos(\omega_0\,t + \alpha)$ et $y = a \cos(\omega_0\,t + \beta)$: ellipse. 2) $E = \dfrac{1}{2}\,k\,(a^2 + b^2) + cte$.

Exercice 7.

1) $\ddot{x} + \dfrac{b}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m} x = \Omega^2\,x_1(t)$ et en régime permanent $x = a \cos(\Omega\,t - \varphi)$ où $a = \dfrac{\Omega^2\,a_1}{\sqrt{\left(\dfrac{k}{m} - \Omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{\Omega\,b}{m}\right)^2}}$ et

$\tan\varphi = \dfrac{\dfrac{\Omega\,b}{m}}{\dfrac{k}{m} - \Omega^2}$ avec $\sin\varphi > 0$. 2) Si $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et b sont faibles, alors $x \approx a_1 \cos(\Omega\,t - \pi)$: l'amplitude de la réponse est celle de l'onde sismique.

Exercice 8.

$\ddot{\theta} + b\,\dot{\theta} + \dfrac{g}{R}\theta = -\,b\,\varphi_0 \sin(\Omega t)$ et $\theta_M = \dfrac{b\,\varphi_0\,\Omega}{\sqrt{\left(\dfrac{g}{R} - \Omega^2\right)^2 + (b\,\Omega)^2}}$ maximum pour $R_r = \dfrac{g}{\Omega^2}$.

Exercice 9.

$\dot{\theta}^2 + 2\,\omega_0^2\,(1 - \cos\theta) = e$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ et $e = \dfrac{2\,E}{m\,l^2}$. 2) (1) : pour $-20° < \theta < +20°$: la trajectoire de phase est un cercle : petites oscillations sinusoïdales ; (2) : pour $-120° < \theta < +120°$: oscillations de grande amplitude, périodiques (trajectoire de phase fermée), non sinusoïdales ; (3) : tour complet ; (4) : limite entre (2) et (3).

Exercice 10.

$x_m = 2\,\sqrt{p}$.