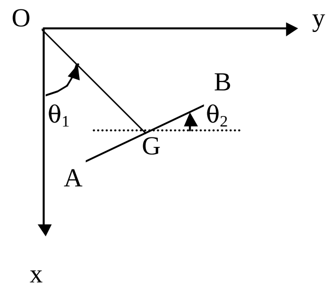
SERIE D'EXERCICES N° 17 : SYSTEMES DE POINTS MATERIELS

Eléments cinétiques d'un système de points matériels.

Exercice 1.

Deux boules identiques, assimilables à deux points matériels de masse m, sont fixées aux deux extrémités d'une barre AB de masse négligeable et de longueur l. Cette barre, astreinte à rester dans le plan (Ox,Oy), est articulée en G à une tige OG de masse négligeable et de longueur a. Le mouvement est repéré par les angles θ_1 et θ_2 (voir la figure).



1. Calculer directement le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_O}$ du système en fonction de m, a, l $\frac{d\theta_1}{dt}$ et $\frac{d\theta_2}{dt}$.
2. Calculer directement l'énergie cinétique K du système en fonction des mêmes données.

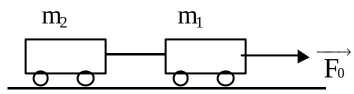
Dynamique d'un système de points matériels.

Exercice 2 : conservation de la quantité de mouvement.

Une arme à feu de masse m_1 tire un projectile de masse m_2 à la vitesse v_2.
1. Calculer la vitesse v_1 et l'énergie cinétique de recul K_1 de l'arme en fonction des données.
2. Soit K l'énergie cinétique totale libérée par l'explosion. Exprimer en fonction de m_1 et m_2 la fraction de cette énergie perdue sous forme d'énergie cinétique de recul. A quelle condition cette perte est-elle faible ?

Exercice 3.

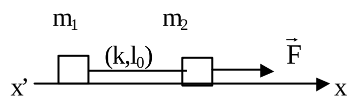
Une locomotive de masse m_1 égale à 40 tonnes exerce une force de traction constante $F_0 = 4000$ N sur un wagon de masse m_2 égale à 10 tonnes qui lui est accroché de façon rigide. La locomotive et son wagon peuvent rouler sans frottement sur des rails horizontaux.



1. Calculer les réactions exercées par les rails sur la locomotive et sur les wagons.
2. Calculer la force exercée par le wagon sur la locomotive.
3. Calculer de la même façon la force exercée par la locomotive sur le wagon.
4. Vérifier que la résultante des forces intérieures au système formé par la locomotive et le wagon est nulle.

Exercice 4.

Deux masses m_1 et m_2 sont reliées par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. Elles peuvent se déplacer sans frottement sur un axe horizontal $x'x$. Pour $t < 0$ le ressort est non tendu et les masses sont au repos, leurs centre d'inertie étants respectivement en O_1 et O_2. A partir de $t = 0$ on exerce sur m_2 une force horizontale constante $\vec{F} = F\,\vec{i}$. On repère la position du centre d'inertie de la première masse par x_1 ($\overrightarrow{O_1M_1} = x_1\,\vec{i}$) et la position du centre d'inertie de la deuxième masse par x_2 ($\overrightarrow{O_2M_2} = x_2\,\vec{i}$).



1. Déterminer l'allongement du ressort.
2. En déduire les grandeurs $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Exercice 5 : machine d'Atwood.

1. Dans le système schématisé sur la figure 1 , la poulie et les fils sont de masse négligeable et l'on a $m_2 > m_1$. L'axe Oy est vertical et dirigé vers le haut. Calculer les accélérations $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{a_2}$ auxquelles sont soumises les masses m_1 et m_2 en fonction de m_1, m_2 et $\vec{g}$. En déduire la tension $\vec{T}$ en fonction des mêmes données.
2. On suspend la poulie à une balance dont les bras de fléau ont pour longueur l_1 et l_2 (figure 2). Quelle est, en fonction de m_1, m_2 l_1 et l_2, la valeur de m à l'équilibre si la poulie est bloquée ? On débloque la poulie. De quelle quantité δm doit-on faire varier m pour rétablir l'équilibre ?
3. Les masses m_1 et m_2 étant au repos sur le plan horizontal P (figure 3), on exerce sur l'axe de la poulie une force verticale $\vec{F}$ dirigée vers le haut, à l'instant précis où l'on retire P. Calculer les accélérations $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{a_2}$ en fonction de m_1, m_2, $\vec{F}$ et $\vec{g}$. Pour quelle valeur de F, m_1 ou m_2 sont-elles immobiles dans Oxyz ?

Figure 1 :

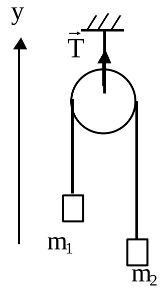


Figure 2 :

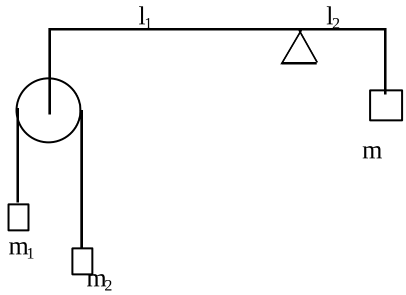
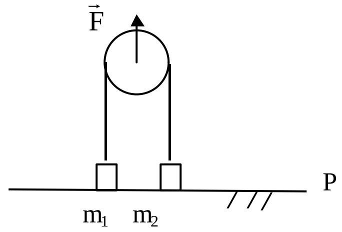
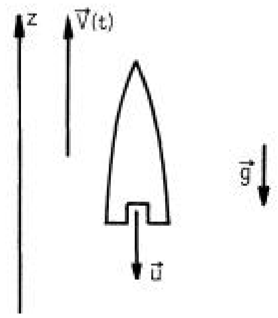


Figure 3 :



Exercice 6 : système ouvert.

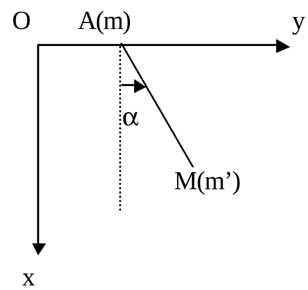
Une fusée, de masse totale $m(0) = 12$ t au départ, est lancée verticalement. La propulsion est assurée par un dispositif à réaction : éjection de gaz produits par la combustion de propergol à travers une tuyère, avec un débit massique constant $a = 120\ \text{kg.s}^{-1}$, à la vitesse relative $\vec{u}$ par rapport à la fusée ($u = 2400\ \text{m.s}^{-1}$). Le mélange combustible a une masse $m_c(0) = 0{,}8\ m(0)$ au départ.



1. Etablir l'expression de la vitesse $\vec{V}(t)$ de la fusée à l'instant t dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen, en fonction de $g(M)$, intensité du champ de pesanteur au lieu M où se trouve la fusée, u, $m(0)$ et $m(t)$ masse de la fusée à l'instant t.
2. Pour une intensité du champ de pesanteur constante $g = 10\ \text{m.s}^{-2}$, calculer la vitesse maximale acquise par la fusée.

Exercice 7.

Un chariot de masse m assimilable à un point matériel A est mobile sans frottement sur un plan horizontal. A ce chariot est articulée sans frottement un pendule formé d'une tige AM de longueur l de masse négligeable, terminée par un point matériel M de masse m'. L'ordonnée y repère A et l'angle α repère M.

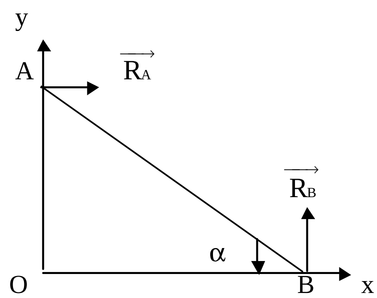


1. Etablir une première relation entre y et α par application du théorème du centre d'inertie dans le référentiel galiléen lié à $Oxyz$ sachant qu'à l'instant $t = 0$, A et M sont au repos, A étant à l'origine O, avec $\alpha = \alpha_0$.
2. Par application du théorème du moment cinétique en A, fixe dans le référentiel non galiléen lié au chariot (ne pas oublier le moment des forces d'inertie), établir une seconde relation entre y et α.
3. Résoudre pour α petit.

Energie d'un système de points.

Exercice 8.

Les extrémités A et B d'une barre homogène de masse m et de longueur l glissent sans frottement sur deux plans, A sur le plan vertical et B sur le plan horizontal. On repère la position de la barre par l'angle α qu'elle fait avec l'horizontale, la barre restant constamment dans le plan vertical. Initialement $\alpha = \alpha_0$ et $\frac{d\alpha}{dt} = 0$.



1. Exprimer l'énergie cinétique de la barre dans le référentiel lié à $Oxyz$ en fonction de m, l, α et $\frac{d\alpha}{dt}$. On utilisera le deuxième théorème de Koenig, l'énergie cinétique barycentrique étant évaluée par une intégration.

2. Appliquer le théorème de l'énergie mécanique pour exprimer $\frac{d\alpha}{dt}$ en fonction de l, α, α_0 et g intensité du champ de pesanteur. En déduire par dérivation $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ en fonction de l, g et α.

3. Appliquer le théorème du centre d'inertie pour exprimer les réactions R_A et R_B en fonction de m, g, l, α, $\frac{d\alpha}{dt}$ et $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$. A l'aide des relations établies au 2, calculer R_A et R_B. Pour quelle valeur de α R_A s'annule-t-elle ? Que se passe-t-il alors ?

Réponses (les vecteurs sont ici notés en caractères gras).

Exercice 1.

1) $\mathbf{s_0} = 2\,m\,(a^2\,\dot\theta_1 + \frac{l^2}{4}\,\dot\theta_2\,)\,\mathbf{u_z}$. 2) $K = m\,(a^2\,\dot\theta_1{}^2 + \frac{l^2}{4}\,\dot\theta_2{}^2\,)$.

Exercice 2.

1) $\mathbf{v_1} = -\,\frac{m_2}{m_1}\,\mathbf{v_2}$ et $K_1 = \frac{m_2{}^2\,v_2{}^2}{2\,m_1}$. 2) $\frac{K_1}{K} = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ faible si $m_1 >> m_2$.

Exercice 3.

1) $R_{N1} = m_1\,g = 4{,}0.10^5$ N et $R_{N2} = m_2\,g = 1{,}0.10^5$ N . 2)3) $T = \frac{m_2}{m_1+m_2}\,F_0 = 800$ N . 4) $\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2} = \mathbf{0}$.

Exercice 4.

1) $x_2 - x_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\frac{F}{k}\,(1-\cos\sqrt{k\frac{m_1+m_2}{m_1\,m_2}}\;t\,)$. 2) $x_1 = \frac{F}{m_1+m_2}\,(\frac{t^2}{2} + \frac{m_1\,m_2}{k\,(m_1+m_2)}(\cos\sqrt{k\frac{m_1+m_2}{m_1\,m_2}}\;t - 1))$ et

$x_2 = \frac{F}{m_1+m_2}\,(\frac{t^2}{2} + \frac{m_1{}^2}{k\,(m_1+m_2)}(1-\cos\sqrt{k\frac{m_1+m_2}{m_1\,m_2}}\;t\,))$.

Exercice 5.

1) $\mathbf{a_1} = -\,\mathbf{a_2} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\,\mathbf{g}$ et $\mathbf{T} = -\,\frac{4\,m_1\,m_2}{m_1+m_2}\,\mathbf{g}$. 2) $\delta m = -\,\frac{l_1}{l_2}\,\frac{(m_1-m_2)^2}{m_1+m_2}$. 3) $\mathbf{a_1} = \mathbf{g} + \mathbf{F}\,/\,(\,2\,m_1\,)$ et $\mathbf{a_2} = \mathbf{g} + \mathbf{F}\,/\,(\,2\,m_2\,)$:
m_1 immobile si $\mathbf{F} = -\,2\,m_1\,\mathbf{g}$ et m_2 immobile si $\mathbf{F} = -\,2\,m_2\,\mathbf{g}$.

Exercice 6.

1) $\mathbf{V}\,(t) - \mathbf{0} = \int_0^t \mathbf{g}\,(M)\,dt\; + \mathbf{u}\,\ln\left(\frac{m\,(t)}{m\,(0)}\right)$. 2) $V\,(t_f) = u\,\ln\left(\frac{m\,(0)}{m\,(0) - m_c\,(0)}\right) - g\,\frac{m_c\,(0)}{a} = 3{,}1.10^3\ m.s^{-1}$.

Exercice 7.

1) $y + \frac{m'}{m+m'}\;l\sin\alpha = \frac{m'}{m+m'}\;l\sin\alpha_0$. 2) $l\,\ddot\alpha + \ddot y\cos\alpha + g\sin\alpha = 0$. 3) Pour α petit : $\alpha = \alpha_0\cos\,(\sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{m+m'}{m}}\;t\,)$ et

$y = \frac{m'}{m+m'}\,l\,\alpha_0\,(\,1 - \cos\,(\sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{m+m'}{m}}\;t\,)$.

Exercice 8.

1) $K^* = \frac{m\,l^2\,\dot\alpha^2}{24}$ et $K = \frac{m\,l^2\,\dot\alpha^2}{6}$. 2) $\dot\alpha^2 = \frac{3\,g}{l}\,(\,\sin\alpha_0 - \sin\alpha\,)$ d'où $\ddot\alpha = -\,\frac{3\,g}{2\,l}\cos\alpha$.

3) $R_A = \frac{3}{2}\,m\,g\cos\alpha\,(\frac{3}{2}\sin\alpha - \sin\alpha_0\,)$ et $R_B = m\,g\,\{\,1 + \frac{3}{2}\,[\,\sin\alpha\,(\sin\alpha - \sin\alpha_0\,) - \frac{\cos^2\alpha}{2}\,]\,\}$: pour $\sin\alpha = \frac{2}{3}\sin\alpha_0$ la tige décolle en A .