SERIE D'EXERCICES N° 18 : SYSTEME ISOLE DE DEUX POINTS MATERIELS

Détermination d'une loi de force.

Exercice 1.

On considère dans un référentiel galiléen une particule M de masse m soumise à une force centrale $\vec{f} = f(r)\,\overrightarrow{u_r}$.
Déterminer la loi de force $f(r)$ pour que la trajectoire de la particule soit une spirale logarithmique $r = a\,e^{\theta}$, si à l'instant initial la particule est lancée en M_0 ($\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{OM_0}$) avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ orthogonale à $\overrightarrow{r_0}$.

Exercice 2.

On considère deux particules M_1 et M_2, de masses respectives m_1 et m_2, en interaction suivant une loi de force $f(r)$. Déterminer $f(r)$, en introduisant la constante des aires C et de la masse réduite μ, pour que la trajectoire relative de M_2 par rapport à M_1 soit :

1. un cercle passant par M_1 : $r = 2a\cos\theta$,
2. une conique : $r = \dfrac{p}{1 \pm \cos\theta}$.

On représentera dans chaque cas la trajectoire.

Mouvement rectiligne.

Exercice 3.

Deux ions M_1 et M_2, respectivement de masses m_1 et m_2 et de charges q_1 et q_2, sont lâchés sans vitesse initiale à la distance r_0 l'un de l'autre dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

1. Les charges q_1 et q_2 sont opposées.

a) En quel point les particules se rencontrent-elles ?

b) En quelle date t_0 se rencontrent-elles ? On répondra en introduisant la masse réduite et en établissant une équation différentielle à variables séparables en r et t que l'on pourra résoudre en effectuant le changement de variable : $\dfrac{r}{r_0} = \cos^2\theta$.

c) A quelle distance r_1 doit-on lâcher les particules sans vitesse initiale pour qu'elles se rencontrent à la date $t_1 = 8\,t_0$?

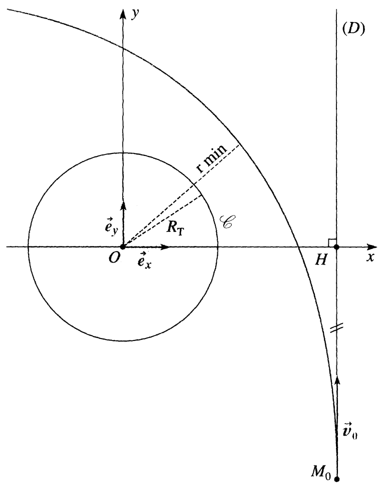
2. Les charges sont de même signe.

Calculer leurs vitesses limites $v_{1\infty}$ et $v_{2\infty}$.

Distance de plus courte approche.

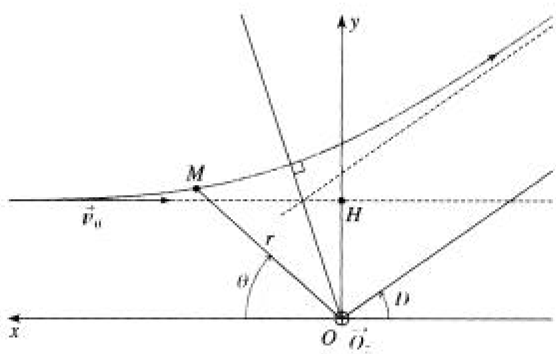
Exercice4 : interaction attractive.

Un météore, point matériel M de masse m négligeable devant la masse M_T de la Terre, de centre O, arrive de l'infini avec la vitesse $\overrightarrow{v_0}$ par rapport à la Terre. M décrit une branche d'hyperbole de foyer O. Son paramètre d'impact est $OH = b$ (voir la figure).
Calculer sa distance r_{min} de plus courte approche de la Terre, en fonction de v_0, b, M_T, G constante de gravitation et R_T rayon de la Terre.



Exercice 5 : interaction répulsive : diffusion de Rutherford.

Une particule α, point matériel M de masse m et de charge $q = 2e$, venant de l'infini avec la vitesse $\overrightarrow{v_0}$, s'approche avec le paramètre d'impact $OH = b$ d'un noyau cible, point matériel O de masse $M \gg m$ et de numéro atomique Z.
Le point M décrit une branche d'hyperbole de foyer O.
Calculer la distance de plus courte approche r_{min} du noyau.
.



Satellite terrestre.

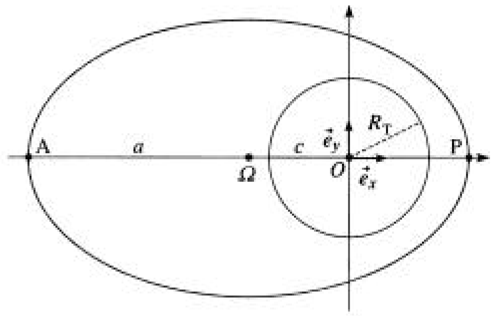
Exercice 6 : trajectoire circulaire.

1. Exprimer la vitesse v_c et la période T d'un satellite circulaire terrestre de masse m, en fonction de l'intensité de la gravitation au sol $g_0 = 9{,}81\ m.s^{-2}$ et du rayon terrestre $R_T = 6370\ km$. Calculer v_c et T pour un satellite placé à $h = 500\ km$ d'altitude.
2. En déduire, dans le cas de la trajectoire circulaire, la troisième loi de Kepler : $\dfrac{T^2}{r^3} = K$, r étant le rayon de l'orbite. Calculer la constante K et commentez le résultat obtenu.

Exercice 7 : trajectoire elliptique.

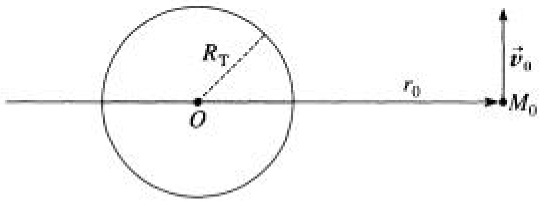
Le premier satellite artificiel avait son apogée à une altitude $h_A = 327\ km$ et son périgée $h_P = 180\ km$.

1. Déterminer les caractéristiques géométriques (a, b, c, e et p) de sa trajectoire, sachant que le rayon terrestre est $R_T = 6370\ km$.
2. L'intensité du champ de gravitation au sol étant $g_0 = 9{,}81\ m.s^{-2}$, en déduire sa période de révolution T.



Exercice 8 : condition de lancement d'un satellite terrestre.

Un satellite est injecté sur orbite en un point M_0, distant de r_0 du centre O de la Terre, avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ orthogonale à $\overrightarrow{OM_0}$. On note v_c la vitesse du satellite sur l'orbite circulaire (O, r_0) et $\lambda = \dfrac{r_0}{R_T}$ le rapport des rayons où R_T est le rayon terrestre. Démontrer que le satellite n'échappera pas à l'attraction terrestre et ne rencontrera pas la Terre si $\dfrac{2}{1+\lambda} < \left(\dfrac{v_0}{v_c}\right)^2 < 2$.



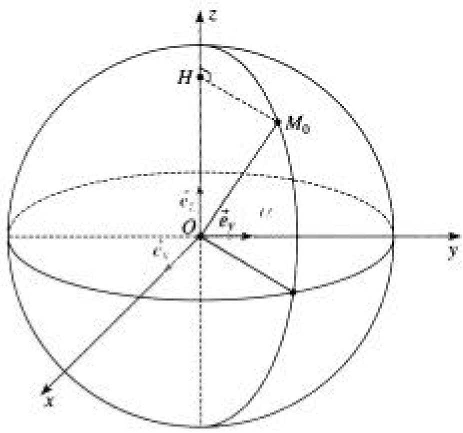
Exercice 9 : satellite géostationnaire.

Un satellite est dit géostationnaire lorsqu'il est immobile dans tout référentiel lié à la Terre.

1. Démontrer qu'un satellite géostationnaire a obligatoirement sa trajectoire dans le plan équatorial.
2. Calculer son altitude h en fonction de $g_0 = 9{,}81\ m.s^{-2}$, intensité du champ de gravitation au sol, et de $R_T = 6{,}37.10^{+6}\ m$, le rayon de la Terre.

Exercice 10 : énergie de mise sur orbite d'un satellite terrestre.

Un satellite terrestre de masse m est lancé d'une base M_0 située à la latitude λ.
Quelle énergie ΔE faut-il lui fournir pour le placer sur une orbite circulaire de rayon r ? On exprimera ΔE en fonction de m, λ, g_0 intensité du champ de gravitation au sol, R_T rayon terrestre et ω_T vitesse de rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique $(R) = (O ; \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.
Commentez l'expression obtenue.



Etoile double.

Exercice 11.

Dans une étoile double, les deux étoiles composantes ont une orbite relative circulaire, la période de révolution étant T_0.
Dans le référentiel barycentrique, la vitesse de chacune des étoiles a sensiblement le même module v_0.
Calculer la distance d des étoiles ainsi que leur masse.

Réponses (les vecteurs sont ici notés en caractères gras).

Exercice 1.

$f(r) = -\dfrac{2\, m\, r_0^{\,2}\, v_0^{\,2}}{r^3}$.

Exercice 2.

1) $f(r) = -\dfrac{8\, a^2\, \mu\, C^2}{r^5}$. 2) $f(r) = -\dfrac{\mu\, C^2}{p}\dfrac{1}{r^2}$.

Exercice 3.

1.a) Les particules se rencontrent en G . 1.b) à $t_0 = \dfrac{\pi}{q_1}\sqrt{\dfrac{\pi\varepsilon_0\,\mu}{2}}\, r_0^{\,3/2}$ (si $q_1 = -q_2 > 0$) .1.c) $r_1 = 4\, r_0$.

2) $\mathbf{v}^*_{\mathbf{lim1}} = -\sqrt{\dfrac{q_1 q_2}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{m_2}{m_1(m_1+m_2)}\dfrac{1}{r_0}}\ \mathbf{u}$ et $\mathbf{v}^*_{\mathbf{lim2}} = +\sqrt{\dfrac{q_1 q_2}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{m_1}{m_2(m_1+m_2)}\dfrac{1}{r_0}}\ \mathbf{u}$.

Exercice 4.

$r_{min} = -\dfrac{G\, M_T}{v_0^{\,2}} + \sqrt{\left(\dfrac{G\, M_T}{v_0^{\,2}}\right)^2 + b^2}$.

Exercice 5.

$r_{min} = +\dfrac{Z e^2}{2\pi\varepsilon_0\, m\, v_0^{\,2}} + \sqrt{\left(\dfrac{Z e^2}{2\pi\varepsilon_0\, m\, v_0^{\,2}}\right)^2 + b^2}$.

Exercice 6.

1) $v_c = \sqrt{\dfrac{G\, M_T}{r}}$ ou $v_c = R_T\sqrt{\dfrac{g_0}{R_T + h}} = 7{,}61\ km.s^{-1}$ et $T = \dfrac{2\pi}{R_T}\sqrt{\dfrac{(R_T + h)^3}{g_0}} = 1\ h\ 35\ min$. 2) $\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\, M_T}$.

Exercice 7.

1) $a = R_T + \dfrac{h_A + h_P}{2} = 6{,}62.10^3\ km$; $c = \dfrac{h_A - h_P}{2} = 73{,}5\ km$; $b = \sqrt{a^2 - c^2} \approx a$; $e = \dfrac{c}{a} = 1{,}11.10^{-2}$; $p = \dfrac{b^2}{a} \approx a$ (trajectoire quasi-circulaire). 2) $\dfrac{T^2}{a^3} = -\dfrac{4\pi^2\,\mu}{k}$ d'où $T = \dfrac{2\pi}{R_T}\sqrt{\dfrac{a^3}{g_0}} = 1\ h\ 29\ min$.

Exercice 9.

1) Cours. 2) $h = \sqrt[3]{\dfrac{g_0\, R_T^{\,2}\, T^2}{4\pi^2}} - R_T = 3{,}58.10^7\ m$.

Exercice 10.

$\Delta E = E_2 - E_1 = m\left[\, g_0\, R_T\left(1 - \dfrac{R_T}{2r}\right) - \dfrac{1}{2}\,\omega_T^2\, R_T^2 \cos^2\lambda \,\right]$ minimale pour $\lambda = 0$ (tir vers l'Est depuis l'équateur pour profiter de la rotation de la Terre).

Exercice 11.

$d = \dfrac{T_0\, v_0}{\pi}$ et $m = \dfrac{2\, T_0\, v_0^{\,3}}{\pi\, G}$.